9. Übungsblatt

Einführung in das Zahlensystem (SS 2004)

Abgabe: Freitag, 9.7.2004 vor der Vorlesung

Versuchen Sie bitte, Ihre Lösungen ausführlich zu begründen. Die Angabe eines Ergebnisses allein reicht nicht aus!

Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Vornamen und Ihre Matrikel–Nummer auf die erste Seite, und heften Sie alle Seiten zusammen.

30. Aufgabe: Beweise: Sind m und n beliebige ganze Zahlen, so besitzt die Gleichung $m + x = n$ genau eine Lösung in $\mathbb{Z}$. (2)

31. Aufgabe: Sei $(M, \preceq)$ eine geordnete Menge. Eine nichtleere Teilmenge $T \subseteq M$ heißt **nach unten beschränkt**, wenn es ein $u \in M$ gibt mit der Eigenschaft $u \preceq x$ für alle $x \in T$. Analog: **nach oben beschränkt**.

a) Beweise daß eine nichtleere Teilmenge $T \subseteq \mathbb{Z}$ genau dann ein kleinstes Element enthält, wenn T nach unten beschränkt ist.

b) Formuliere die a) entsprechende Aussage für die Existenz eines größten Elementes.

c) Gibt es eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$, die weder nach unten noch nach oben beschränkt ist? Die Antwort ist zu begründen!

Hinweis: Es ist bekannt, daß in einer linear geordneten Menge jede nichtleere **endliche** Teilmenge ein größtes Element und ein kleinstes Element besitzt. (5)

32. Aufgabe: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Beweise:

a) Es gilt $-1 < 0$

b) $a > 0$ und $b > 0 \implies ab > 0$

c) $a > 0 \iff -a < 0$

d) $ac < bc$ und $c > 0 \implies a < b$.

e) $ac \leq bc$ und $c > 0 \implies a \leq b$. (3)

33. Aufgabe: Beweise:

a) Die Addition $\oplus$ auf $\mathbb{Q}$ ist assoziativ.

b) Die Relation aus Definition (9.15) ist wohldefiniert.

c) Die Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$ ist mit der Multiplikation $\diamond$ auf $\mathbb{Q}$ verträglich (9.17c). (4)