

9. Übungsblatt

Einführung in das Zahlensystem (SS 2004)

Abgabe: Freitag, 9.7.2004 vor der Vorlesung

Versuchen Sie bitte, Ihre Lösungen ausführlich zu begründen. Die Angabe eines Ergebnisses allein reicht nicht aus!

Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Vornamen und Ihre Matrikel-Nummer auf die erste Seite, und heften Sie alle Seiten zusammen.

30. Aufgabe: Beweise: Sind m und n beliebige ganze Zahlen, so besitzt die Gleichung $m + x = n$ genau eine Lösung in \mathbb{Z} . (2)

31. Aufgabe: Sei (M, \preceq) eine geordnete Menge. Eine nichtleere Teilmenge $T \subseteq M$ heißt **nach unten beschränkt**, wenn es ein $u \in M$ gibt mit der Eigenschaft $u \preceq x$ für alle $x \in T$. Analog: **nach oben beschränkt**.

a) Beweise daß eine nichtleere Teilmenge $T \subseteq \mathbb{Z}$ genau dann ein kleinstes Element enthält, wenn T nach unten beschränkt ist.

b) Formuliere die a) entsprechende Aussage für die Existenz eines größten Elementes.

c) Gibt es eine echte Teilmenge von \mathbb{Z} , die weder nach unten noch nach oben beschränkt ist? Die Antwort ist zu begründen!

Hinweis: Es ist bekannt, daß in einer linear geordneten Menge jede nichtleere **endliche** Teilmenge ein größtes Element und ein kleinstes Element besitzt. (5)

32. Aufgabe: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Beweise:

a) Es gilt $-1 < 0$

b) $a > 0$ und $b > 0 \implies ab > 0$

c) $a > 0 \iff -a < 0$

d) $ac < bc$ und $c > 0 \implies a < b$.

e) $ac \leq bc$ und $c > 0 \implies a \leq b$. (3)

33. Aufgabe: Beweise:

a) Die Addition \diamond auf \mathbb{Q} ist assoziativ.

b) Die Relation aus Definition (9.15) ist wohldefiniert.

c) Die Ordnungsrelation auf \mathbb{Q} ist mit der Multiplikation \diamond auf \mathbb{Q} verträglich (9.17c). (4)