7. Übungsblatt

Einführung in das Zahlensystem (SS 2004)

Abgabe: Freitag, 25.6.2004 vor der Vorlesung

Versuchen Sie bitte, Ihre Lösungen ausführlich zu begründen. Die Angabe eines Ergebnisses allein reicht nicht aus!

Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Vornamen und Ihre Matrikel–Nummer auf die erste Seite, und heften Sie alle Seiten zusammen.

22. Aufgabe: Die Relation R auf $\mathbb{N}$ sei definiert durch

$$mRn \;:\Longleftrightarrow\; (m \text{ und } n \text{ sind beide gerade oder beide ungerade})$$

a) Beweise, daß R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ ist.

b) Bestimme die Äquivalenzklasse von 6 bzw. 7 bzgl. R.

c) Bestimme 3 verschiedene vollständige Vertretersysteme für $\mathbb{N}/R$.

d) Stelle $\mathbb{N}$ als disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen dar. (4)

23. Aufgabe: Betrachte auf der Menge $\mathcal{M} := \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ die Äquivalenzrelation $\sim$ der Gleichmächtigkeit.

a) Bestimme alle Elemente der Äquivalenzklasse von $\{11\}$.

b) Bestimme die Äquivalenzklasse von $T := \{3, 5, 7, 8\}$. Welche gemeinsame Eigenschaft haben alle Elemente aus $[T]_\sim$?

c) Bestimme ein vollständiges Vertretersystem für $\mathcal{M}/\sim$.

d) Stelle $\mathcal{M}$ als disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen dar. (3)

24. Aufgabe: a) Untersuche, ob $[(11,3)] = [(24,16)]$ und $[(5,9)] = [(9,4)]$ gilt.

b) Berechne: $[(4,7)] \oplus [(10,2)]$, $[(7,4)] \oplus [(4,7)]$, $[(1,5)] \oplus [(9,3)] \oplus [(12,14)]$, $[(3,5)] \oplus [(13,13)]$.

Finde jeweils für das Ergebnis einen Vertreter, dessen erste Komponente so klein wie möglich ist. (3)

25. Aufgabe: Beweise:

a) Die Addition $\oplus$ auf $\mathbb{Z}$ ist assoziativ.

b) $[(m,n)] \oplus [(0,0)] = [(m,n)]$ für alle $[(m,n)] \in \mathbb{Z}$.

c) $[(m,m)] = [(0,0)]$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

d) $[(m,n)] \oplus [(n,m)] = [(0,0)]$ für alle $[(m,n)] \in \mathbb{Z}$. (3)
