6. Übungsblatt

Einführung in das Zahlensystem (SS 2004)

Abgabe: Mittwoch, 16.6.2004 vor der Vorlesung

Versuchen Sie bitte, Ihre Lösungen ausführlich zu begründen. Die Angabe eines Ergebnisses allein reicht nicht aus!

Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Vornamen und Ihre Matrikel–Nummer auf die erste Seite, und heften Sie alle Seiten zusammen.

18. Aufgabe: Sei $a \in \mathbb{N}$. Beweise durch vollständige Induktion, daß die folgenden Potenzregeln für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gelten:

a) $a^m \cdot a^n \; = \; a^{m+n}$

b) $(a^m)^n \; = \; a^{m \cdot n}$ (4)

19. Aufgabe: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(m \geq 1)$ und b seien natürliche Zahlen. Beweise durch vollständige Induktion nach m

$$b \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \right) \; = \; \sum_{i=1}^{m} b \cdot a_i$$

(3)

20. Aufgabe: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 := 1$, $a_{n+1} := 2a_n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Berechne a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

b) Stelle auf Grund der Ergebnisse in a) eine Vermutung für eine direkte Formel für a_n auf und beweise diese durch vollständige Induktion.

c) Zeige mit Hilfe des Rekursionssatzes, daß es eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt mit $f(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (4)

21. Aufgabe: a) Gib eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_5 \times \mathbb{N}_6 \longrightarrow \mathbb{N}_{30}$ an und beweise alles Nötige. Der Bildwert $f((i,k))$ eines Paares $(i,k) \in \mathbb{N}_5 \times \mathbb{N}_6$ soll dabei durch eine Formel beschrieben werden, die von i und k abhängt.

b) Verallgemeinere die Überlegungen aus a) und konstruiere eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_{mn}$ (ebenfalls mit Beweis!). (4)

Internet–Adresse: http://math-www.uni-paderborn.de/~chris