11. Übungsblatt

Einführung in das Zahlensystem (SS 2004)

Mündliche Bearbeitung zum 23.7.2004

38. Aufgabe: Beweise: Ist $I = ([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung, so ist auch $-I = ([-b_n, -a_n])$ eine Intervallschachtelung.

39. Aufgabe: (a_n) und (b_n) seien Folgen rationaler Zahlen. Beweise:

a) Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, so ist auch die "Summenfolge" $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge.

b) Sind (a_n) und (b_n) monoton wachsend, so ist auch $(a_n + b_n)$ monoton wachsend.

c) Ist (a_n) eine Nullfolge und gilt $|b_n| \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbf{N}$, so ist auch (b_n) eine Nullfolge.

d) Seien (a_n) und (b_n) monoton wachsende Folgen. Muß dann auch die "Produktfolge" $(a_n \cdot b_n)$ monoton wachsend sein? Wenn nein, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen ist diese Aussage richtig?

40. Aufgabe: $([a_n, b_n])$ sei eine Intervallschachtelung, und es sei $x \in \bigcap\limits_{n \geq 1} [a_n, b_n]$. Beweise, daß die Folgen $(a_n - x)$ und $(b_n - x)$ Nullfolgen sind.

41. Aufgabe: Eine Folge (a_n) rationaler Zahlen heißt **konvergent** mit dem Grenzwert $x \in \mathbf{Q}$, wenn die Folge $(a_n - x)$ eine Nullfolge ist (in Zeichen: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x$). Beweise: Gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x$ und $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = y$, so folgt

$\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = x + y$ und $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = x \cdot y$