§21. Integrierbarkeit

A) Das unbestimmte Integral

Problem: In der Differentialrechnung wird zu einer gegebenen Funktion f die Ableitung f' bestimmt. Wir wollen hier das umgekehrte Problem behandeln: Es ist die Ableitung einer Funktion gegeben, und es soll die Funktion selbst bestimmt werden.

D sei im folgenden ein Intervall.

(21.1) DEF: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine vorgegebene Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Stammfunktion** von f, wenn $F' = f$ gilt.

(21.2) SATZ: Sind F und G zwei Stammfunktionen einer Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, so ist $F - G$ eine konstante Funktion, d.h. es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = G(x) + C \quad \forall\, x \in D$$

Bew: $F' = f = G' \implies F' - G' = (F - G)' = 0$. Nach (20.13) ist dann $F - G$ eine konstante Funktion, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $(F - G)(x) = F(x) - G(x) = C$ $(\forall\, x \in D)$. Also gilt $F(x) = G(x) + C \quad \forall\, x \in D$.

(21.3) BEM: a) Man bezeichnet eine Stammfunktion einer Funktion f auch als **unbestimmtes Integral von** f und schreibt dafür

$$\int f(x)\, dx$$

Ist F irgendeine Stammfunktion von f, so schreibt man

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C\ ,$$

wobei C eine beliebige reelle Konstante ist. Die Funktion $f(x)$ in $\int f(x)\, dx$ heißt auch der **Integrand** des Integrals.

(21.3b) Tabelle von unbestimmten Integralen:

$f(x)$	Definitionsbereich	$\int f(x)dx$
$x^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\ln(\|x\|) + C$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\dfrac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_{>0}$	$x(\ln(x) - 1) + C$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x) + C$
$f'(x)$	$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ (diffbar)	$f(x) + C$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ (diffbar) $f(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in D$	$\ln(\|f(x)\|) + C$

Man verifiziert diese Ergebnisse, indem man die in der rechten Spalte stehende Funktion ableitet, etwa:

$$(\ln(f(x)))' \;=\; \ln'(f(x)) \cdot f'(x) \;=\; \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{(nach der Kettenregel)}$$

<u>(21.4) SATZ:</u> Besitzen die Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktionen, so gilt dies auch für $f + g$ und rf $(r \in \mathbb{R})$.

<u>Bew:</u> Gelte $F' = f$ und $G' = g$. Dann folgt $(F + G)' = F' + G' = f + g$, d.h. $F + G$ ist Stammfunktion von $f + g$, und $(rF)' = rF' = rf$, d.h. rF ist Stammfunktion von rf.

<u>BEM:</u> Wir können dies auch folgendermaßen schreiben:

$$\int (f+g)(x)\,dx \;=\; \int [\,f(x) + g(x)\,]\,dx \;=\; \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (rf)(x)\,dx \;=\; \int rf(x)\,dx \;=\; r\int f(x)\,dx.$$

Wir wollen nun einige **Integrationsmethoden** behandeln. Es geht dabei um das Problem, zu einer konkret gegebenen Funktion eine Stammfunktion zu bestimmen. Je nach Differentiationsregel erhalten wir unterschiedliche Verfahren. Die erste Methode beruht auf der Produktregel:

(21.5) SATZ: Partielle Integration

$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen. Besitzt dann $f' \cdot g$ eine Stammfunktion, so besitzt auch $f \cdot g'$ eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int f(x)g'(x)\,dx \;=\; f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Bew: Differenziere das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ nach der Produktregel und integriere die daraus resultierende Gleichung.

(21.6) BEISPIELE: **a)** $\boxed{\int \ln(x)\,dx \;=\; x(\ln(x) - 1) + C}$

Setze $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = x$. Dann sind f und g beide differenzierbar: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = 1$, und es gilt $\underline{\int \ln(x)\,dx} \;=\; \int f(x)\underbrace{g'(x)}_{=1}\,dx \;=\; f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \;=$ $\ln(x)x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx \;=\; \ln(x)x - \int dx \;=\; \ln(x)x - x + C \;=\; \underline{x(\ln(x) - 1) + C}$

b) $\boxed{\int xe^x\,dx \;=\; e^x(x - 1) + C}$ (Setze $f(x) = x$ und $g(x) = e^x$)

c) $\boxed{\int x\sin(x)\,dx \;=\; \sin(x) - x\cos(x) + C}$ (Setze $f(x) = x$ und $g(x) = -\cos(x)$)

All diese Formeln lassen sich leicht verifizieren, indem man die rechtsstehende Funktion differenziert und mit dem Integranden vergleicht.

Unbestimmte Integrale lassen sich häufig durch Einführung einer neuen Variablen (**Substitution**) einfacher berechnen. Die folgende Methode beruht auf der Kettenregel:

(21.7) SATZ: Substitution I

D und E seien Intervalle. $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion und $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine beliebige Funktion. Es gelte $\varphi(D) \subseteq E$. Ist dann $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so ist $F \circ \varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' : D \longrightarrow \mathbb{R}$, d.h. es gilt

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \;=\; F(\varphi(x)) + C$$

Hierfür schreibt man auch $\displaystyle\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \;=\; \Big(\int f(u)\,du\Big)_{u=\varphi(x)}$

Bew: Nach der Kettenregel (20.8) ist die Hintereinanderausführung $F \circ \varphi$ differenzierbar, und es gilt:

$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) = ((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(x)$,
also $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Informell: Hinter dem Integralzeichen steht der Ausdruck

$$(*) \qquad f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx$$

Durch die Substitution $\varphi(x) =: u$ führen wir eine neue Variable u ein. Dann ist $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$, also **symbolisch** $du = \varphi'(x)\, dx$ (streng genommen ist $\frac{du}{dx}$ **kein** Bruch!). Aus $(*)$ wird damit

$$f(u)\, du$$

Wir bestimmen jetzt das Integral $\int f(u)\, du$, wobei wir f als Funktion der Variablen u auffassen. Ist $F(u)$ eine Stammfunktion von $f(u)$, so ersetzen wir u in $F(u)$ wieder durch $\varphi(x)$ und erhalten so mit $F(\varphi(x))$ die gesuchte Stammfunktion als Funktion von x.

(21.8) BEISPIELE: a) $\boxed{\int \sin^3(x) \cdot \cos(x)\, dx = \frac{1}{4}\sin^4(x) + C}$

Mit $f(x) = x^3$, $F(x) = \frac{1}{4}x^4$, $\varphi(x) = \sin(x)$, $\varphi'(x) = \cos(x)$ ergibt sich:

$$\int \sin^3(x) \cdot \cos(x)\, dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + C = \frac{1}{4}\sin^4(x) + C$$

b) $\boxed{\int x\sqrt{x^2+5}\, dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+5}\right)^3 + C}$

Mit $f(x) = \sqrt{x}$, $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $\varphi(x) = x^2 + 5$, $\varphi'(x) = 2x$ ergibt sich:

$$\int x\sqrt{x^2+5}\, dx = \int \frac{\varphi'(x)}{2} f(\varphi(x))\, dx = \frac{1}{2}\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \frac{1}{2}F(\varphi(x)) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}\right) + C = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+5}\right)^3 + C$$

(21.9) SATZ: **Substitution II**

Es sei $\varphi : \,]a,b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende differenzierbare Funktion mit $\varphi'(x) \neq 0$ $(\forall x \in \,]a,b[\,)$, und es bezeichne $\psi : \,]c,d[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von φ. Ferner sei $f : \,]c,d[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Besitzt dann die Funktion $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' : \,]c,d[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, so hat auch f eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int f(x)\, dx = \left(\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt\right)_{t=\psi(x)}$$

Bew: Aus den Voraussetzungen folgt, daß φ nach (18.16) eine Umkehrfunktion $\psi :]\,c,d\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ mit $c = \inf(\text{Bild}(\varphi))$ und $d = \sup(\text{Bild}(\varphi))$ besitzt, die nach (20.6) wieder differenzierbar ist.

$$]\,a,b\,[\;\underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}}\;]\,c,d\,[\;\xrightarrow{f}\; \mathbb{R}$$

Sei $F :]\,a,b\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$, d.h. $F' = (f\circ\varphi)\cdot\varphi'$. Die Funktion $G :]\,c,d\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $G := F\circ\psi$. Als Hintereinanderausführung zweier differenzierbarer Funktionen ist G wieder differenzierbar, und es gilt nach der Kettenregel

$$G'(x) = \underline{F'(\psi(x))}\cdot\psi'(x) = \underline{(f\circ\varphi)(\psi(x))\cdot\varphi'(\psi(x))}\cdot\psi'(x) = f(\underbrace{\varphi(\psi(x))}_{=x})\cdot\varphi'(\psi(x))\cdot\psi'(x) =$$

$$f(x)\cdot\varphi'(\psi(x))\cdot\psi'(x) \overset{(*)}{=} f(x)\cdot\varphi'(\psi(x))\cdot\frac{1}{\varphi'(\psi(x))} = f(x) \quad (\forall\, x \in\,]\,c,d\,[\,)$$

$(*)$ gilt nach (20.6). Also ist G eine Stammfunktion von f.

Informell: Wir führen in dem Integral $\int f(x)\,dx$ die Substitution $x = \varphi(t)$ durch, wobei φ eine streng monotone differenzierbare Funktion ist, die daher eine Umkehrfunktion ψ besitzt. Dann ist $\dfrac{dx}{dx} = \varphi'(t)$. Dafür schreiben wir wieder **symbolhaft** $dx = \varphi'(t)\,dt$. Aus

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{wird damit} \qquad \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

Der Integrand ist jetzt eine Funktion von t. Ist $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, so ist $F(\psi(t)) = F(\varphi^{-1}(t))$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

(21.10) BEISPIELE: **a)** $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad x = \sin(t) = \varphi(t) \quad , \quad \psi(x) = \varphi^{-1}(x) = t = \arcsin(x) \quad ,$$

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \cos(t) \quad (> 0\ \forall\, t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\,) \quad , \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cdot\cos(t)\,dt = \int \frac{\cos(t)}{\cos(t)}\,dt = \int dt =$$

$$t + C = \arcsin(x) + C$$

b) $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x) + C}$ Setze: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = \sinh(t)$, $t = \operatorname{arsinh}(x)$

Wegen $\underline{\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1}$ folgt $x^2+1 = \sinh^2(t)+1 = \cosh^2(t)$, also $\sqrt{x^2+1} = \cosh(t)$, $\dfrac{dx}{dt} = \sinh'(t) = \cosh(t)$ $(> 0\ \forall\, t \in \mathbb{R})$ und damit $dx = \cosh(t)\,dt$. Setzt man nun ein, so erhält man:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\sinh(t))\cdot\cosh(t)\,dt = \int \frac{\cosh(t)}{\sqrt{\sinh^2(t)+1}}\,dt = \int \frac{\cosh(t)}{\cosh(t)}\,dt = \int dt =$$

$$t + C = \operatorname{arsinh}(x) + C$$

c) $\boxed{\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx \;=\; 2\ln(e^x+1)-x+C}$

$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $x=\ln(t)=\varphi(t)$ $\left(\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}>0\ \forall\, t>0\right)$, $\psi(x)=\varphi^{-1}(x)=t=e^x$.

$$\int f(x)\,dx \;=\; \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \;=\; \int \frac{e^{\ln(t)}-1}{e^{\ln(t)}+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt \;=\; \int\frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt \overset{(*)}{=} \int\left(\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\; \int\frac{2}{t+1}\,dt-\int\frac{1}{t}\,dt \;=\; 2\ln(t+1)-\ln(t)+C \overset{(**)}{=} 2\ln(e^x+1)-\ln(e^x)+C \;=\; 2\ln(e^x+1)-x+C$$

$(*)$: Es gilt $\dfrac{2}{t+1}-\dfrac{1}{t} \;=\; \dfrac{2t-(t+1)}{(t+1)t} \;=\; \dfrac{t-1}{(t+1)t} \;=\; \dfrac{t-1}{t+1}\cdot\dfrac{1}{t}$

$(**)$: Setze wieder $t=e^x$.

(21.11) Integration rationaler Funktionen

Mit Hilfe der **Partialbruchzerlegung** kann man unter gewissen Voraussetzungen rationale Funktionen integrieren. Wir erklären das Vorgehen an einem konkreten Beispiel: Es soll das unbestimmte Integral

$$I \;=\; \int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}\,dx$$

berechnet werden. Zunächst versuchen wir, die Nullstellen des Nenner–Polynoms zu bestimmen: Diese sind $-\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{40}{4}} \;=\; -\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{7}{2} \;=\left\{\begin{array}{c}2\\-5\end{array}\right.$. Also $x^2+3x-10 \;=\; (x-2)\cdot(x+5)$.

Wir zerlegen jetzt den Integranden in einen **Partialbruch**. Dazu machen wir den folgenden Ansatz: Es sollen die Größen A und B so bestimmt werden, daß

$$\frac{5x+11}{x^2+3x-10} \;=\; \frac{5x+11}{(x-2)\cdot(x+5)} \;=\; \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5} \;=\; \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)\cdot(x+5)}$$

gilt. Das ist sicher der Fall, wenn die Zähler für alle $x\in\mathbb{R}$ übereinstimmen, d.h.

$$5x+11 \;=\; A(x+5)+B(x-2) \quad (\forall\, x\in\mathbb{R})$$

Setzt man -5 und 2 für x ein, so erhält man:

$\underline{x=-5}$: $\quad -14=A\cdot 0+B\cdot(-7) \;\Longrightarrow\; \underline{B=2}$

$\underline{x=2}$: $\quad 21=A\cdot 7+B\cdot 0 \;\Longrightarrow\; \underline{A=3}$

Folglich gilt $\quad\dfrac{5x+11}{x^2+3x-10} \;=\; \dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2}{x+5}\quad$ und

$$I \;=\; \int\frac{3}{x-2}\,dx+\int\frac{2}{x+5}\,dx \;=\; 3\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{x+5} \;=\; \underline{3\ln(|x-2|)+2\ln(|x+5|)+C}$$

Bei diesem Beispiel ist wichtig, daß das Polynom im Nenner nur **einfache** reelle Nullstellen hat. Für den Fall mehrfacher reeller oder komplexer Nullstellen sind Modifizierungen notwendig.

(21.12) BEM: Bisher haben wir noch keine allgemeinen Aussagen über die Existenz von unbestimmten Integralen gemacht. Wir werden später sehen, daß jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Jedoch muß sich diese Stammfunktion nicht immer in **geschlossener Form**, d.h. als eine Formel, darstellen lassen. Dies gilt z.B. für die folgenden Funktionen:

$$\frac{e^x}{x}\ ,\ e^{-x^2}\ ,\ \frac{\sin(x)}{x}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\ ,\ \frac{1}{\ln(x)}$$

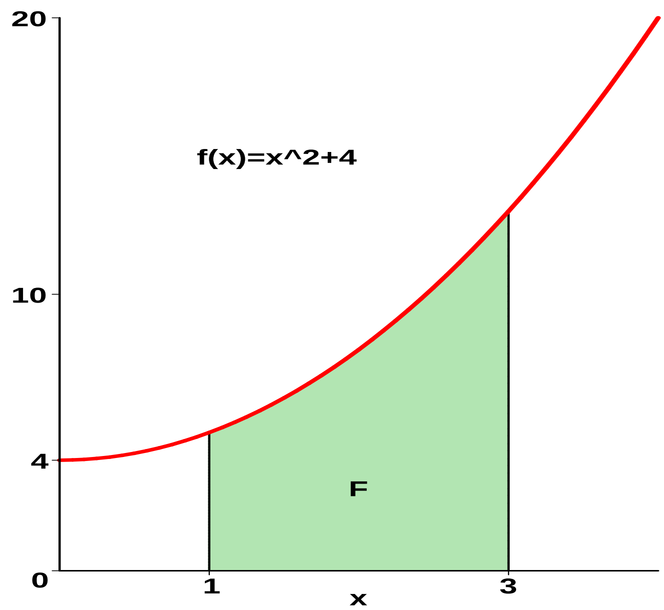
Hier lassen sich die Integrale z.T. über die Potenzreihen der Funktionen bestimmen. Potenzreihen dürfen in ihrem Konvergenzbereich gliedweise integriert werden. So ist z.B.

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{x(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$$

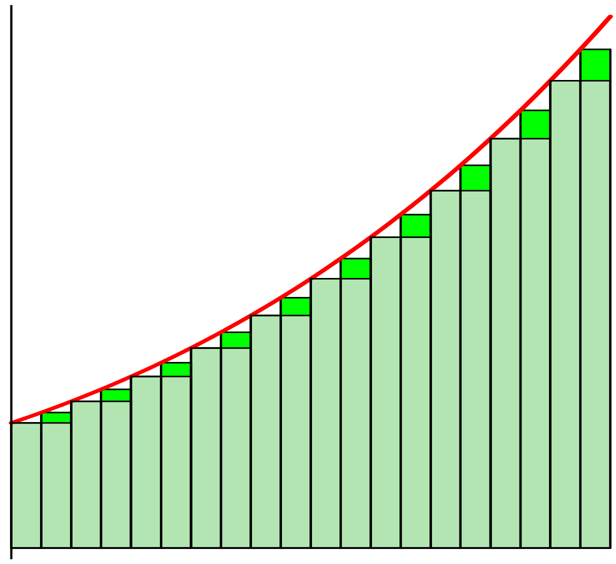
$$\int \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$$

B) Das bestimmte Integral

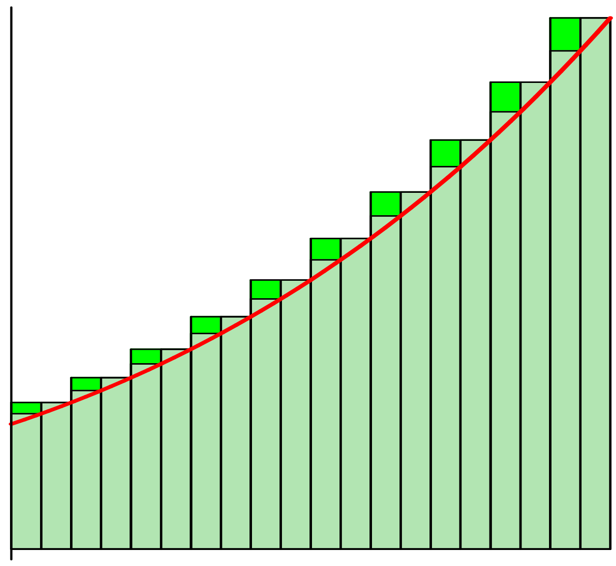
Problem: Gegeben ist eine Funktion $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$, die auf einem abgeschlossenen Intervall definiert ist. **Gesucht** ist der Inhalt der Fläche zwischen der x–Achse und dem Graphen der Funktion f. In den folgenden Beispielen und Bildern ist immer $f(x)\geq 0$ $(\forall\, x\in[a,b])$ vorausgesetzt.



Lösungsweg: Die gesuchte Fläche wird durch Rechtecke approximiert, deren Flächeninhalte sich leicht berechnen lassen. Die beiden folgenden Bilder veranschaulichen diese Idee. Im ersten Falle wird die Fläche "von unten" durch Rechtecke ausgeschöpft. Je feiner die Unterteilung wird, desto mehr nähert sich die Summe der Inhalte der Rechtecke dem gesuchten Flächeinhalt.

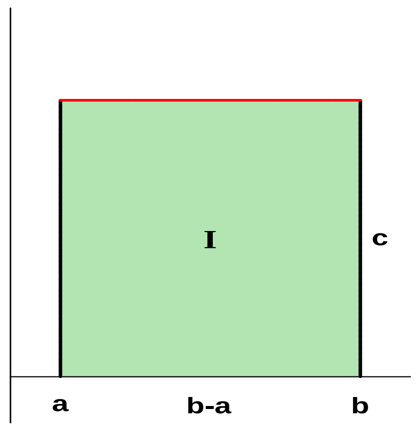


Im zweiten Falle wird die Fläche "von oben" angenähert.



(21.13) BEISPIELE: **a)** $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$. Der Inhalt I zwischen dem Graphen von f und der x–Achse ist dann

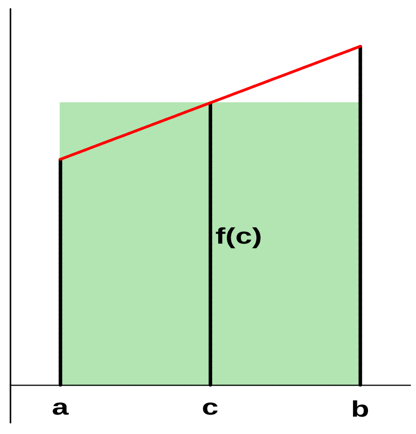
$$I = (b - a) \cdot c = bc - ac$$



In diesem Fall besitzt f eine Stammfunktion F, die definiert ist durch $F(x) = cx$. Dann ist $F(b) = cb$, $F(a) = ac$. Damit ist $I = bc - ac = F(b) - F(a)$. Ist das letzte ein **Zufall ?**

b) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$

Es entsteht ein Trapez, dessen Flächeninhalt I sich folgendermaßen berechnen läßt:



Ist $c := \frac{1}{2}(a + b)$ der Mittelpunkt des Intervalles $[a, b]$, so gilt

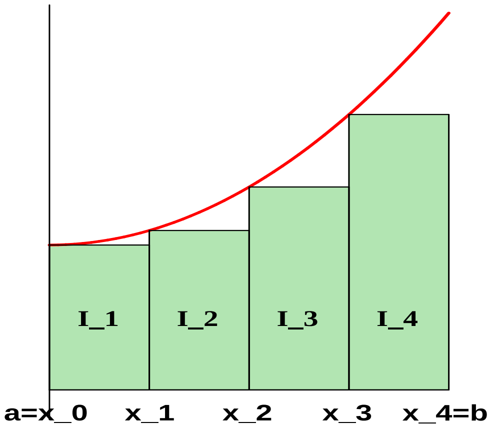
$I = (b - a) \cdot f(c) = (b - a) \cdot (a + b + 3) = b^2 - a^2 + 3(b - a) = (b^2 + 3b) - (a^2 + 3a)$.

f besitzt eine Stammfunktion F mit $F(x) = x^2 + 3x$, und es gilt wieder $I = F(b) - F(a)$. Dasselbe würde gelten, wenn man $F(x) + C$ als Stammfunktion wählen würde.

c) $f : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x^2 + 1 \quad (b > 0)$

Wir erhalten eine grobe Näherung für den Inhalt I der gesuchten Fläche, indem wir das Intervall $[0, b]$ durch die drei Punkte x_1, x_2, x_3 in vier Teilintervalle gleicher Länge unterteilen und die Flächen I_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ der entstehenden Rechtecke addieren.

$$I \approx I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$



Mit $x_k = k \cdot \frac{b}{4}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ ergibt sich

$I_k = \frac{b}{4} \cdot f(x_{k-1}) = \frac{b}{4}(x_{k-1}^2 + 1) = \frac{b}{4}\left((k-1)^2 \cdot \frac{b^2}{16} + 1\right)$ und es folgt

$U_4 := \sum_{k=1}^{4} I_k = \frac{b}{4}\sum_{k=1}^{4}\left((k-1)^2 \cdot \frac{b^2}{16} + 1\right) = \frac{b}{4}\sum_{k=0}^{3} k^2 \cdot \frac{b^2}{16} + \frac{b}{4} \cdot 4 = \frac{b^3}{64} \cdot (\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2}_{=14}) + b = \frac{7}{32}b^3 + b.$

Eine genauere Annäherung erhalten wir, indem wir das Intervall $[0, b]$ in eine größere Anzahl von Teilintervallen unterteilen. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir zerlegen $[0, b]$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge b/n. Die Unterteilungspunkte sind jetzt

$$x_k = k \cdot \frac{b}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Die Summe U_n der zugehörigen Rechteckflächen $I_k = f(x_{k-1}) \cdot \frac{b}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ ist dann:

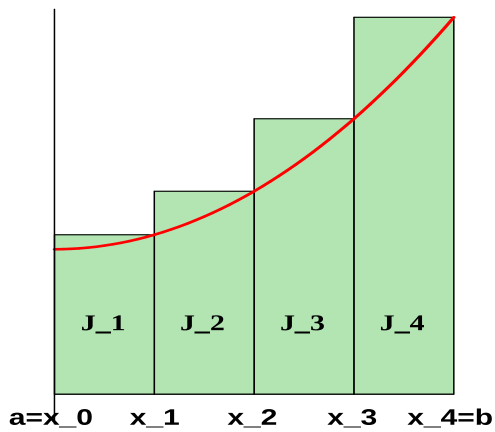
$U_n = \sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \frac{b}{n} = \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\left((k-1)^2\frac{b^2}{n^2} + 1\right) = \frac{b}{n} \cdot \frac{b^2}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} k^2\right) + \frac{b}{n} \cdot n \overset{(*)}{=}$

$\frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + b = \frac{b^3}{6n^2}(2n^2 - 3n + 1) + b = b^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) + b$

$(*)$ Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Im Grenzübergang gilt damit:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{b^3}{3} + b$$

Wir haben mit dieser Überlegung die Fläche **von unten her** angenähert. Ganz entsprechend können wir die Fläche auch **von oben her annähern**:



$$I \approx J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

Mit $x_k = k \cdot \frac{b}{4}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ ergibt sich wie oben

$J_k = \frac{b}{4} \cdot f(x_k) = \ldots = \frac{b}{4}\left(k^2 \cdot \frac{b^2}{16} + 1\right)$ und $O_4 := \sum_{k=1}^{4} J_k = \ldots = \frac{15}{32}b^3 + b.$

Wir sehen also $U_4 \le I \le O_4$, was auch der Anschauung entspricht.

Für eine bessere Annäherung unterteilen wir das Intervall $[0, b]$ wieder in n Teilintervalle der Länge b/n und lassen die Länge dieser Teilintervalle beliebig klein werden. Mit $x_k := k \cdot \frac{b}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ ergibt sich

$O_n := \sum_{k=1}^{n} J_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot x_k = \ldots = b^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}\right) + b$. Auch hier gilt im Grenzübergang $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{b^3}{3} + b$$

Wir sehen $U_n \le I \le O_n$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ und $U_m \le O_n$ $(\forall\, m, n \in \mathbb{N})$. Aus anschaulichen Gründen nennen wir U_n die n**–te Untersumme** der Fläche und O_n die n**–te Obersumme**. In diesem Beispiel ist

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n =: I$$

die gesuchte Fläche. Es ist $F(x) = \frac{x^3}{3} + x$ eine Stammfunktion von f, und es gilt auch hier wieder $I = F(b) - F(0)$.

Eine Verallgemeinerung dieser Überlegungen führt jetzt zum Begriff des bestimmten Integrals.

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine **beschränkte** Funktion, und es gelte $a < b$. Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ durch die Teilpunkte x_k mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Wir nennen in diesem Falle $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in [a, b]^{n+1}$ eine **Zerlegung** des Intervalles $[a, b]$. Dabei ist $[x_{k-1}, x_k]$ das k–**te Teilintervall**, das die **Länge** $\Delta_k := x_k - x_{k-1}$ hat. Wir setzen

$$m_k = m_k(f, \mathcal{Z}) := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$M_k = M_k(f, \mathcal{Z}) := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

m_k ist also das Infimum der Funktionswerte von f im k–ten Teilintervall. Dieses Infimum existiert, da die Funktion f als beschränkt vorausgesetzt ist. Ebenso M_k. Es gilt

$$m_k \leq f(x) \leq M_k \quad (\forall\, x \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \ldots, n)$$

(21.14) DEF: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion und $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann heißt

a) $\mathcal{U}(f, \mathcal{Z}) := \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(f, \mathcal{Z}) \cdot \Delta_k$ die **Untersumme von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$** und

b) $\mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) := \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(f, \mathcal{Z}) \cdot \Delta_k$ die **Obersumme von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$**.

Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ gilt $\mathcal{U}(f, \mathcal{Z}) \leq \mathcal{O}(f, \mathcal{Z})$.

Ziel: Bei immer "feiner" werdenden Zerlegungen nähern sich in günstigen Fällen Unter– und Obersummen einem gemeinsamen Wert, den wir dann als Inhalt der gesuchten Fläche ansehen.

$\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ und $\mathcal{Z}' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_n)$ seien Zerlegungen von $[a, b]$. $\mathcal{Z}'$ heißt eine **Verfeinerung** von $\mathcal{Z}$, wenn $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_n\}$ gilt. Anschaulich ist dann der folgende Satz klar:

(21.15) SATZ: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion.

a) Ist $\mathcal{Z}'$ eine **Verfeinerung** von $\mathcal{Z}$, so gilt

$$\mathcal{U}(f, \mathcal{Z}) \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{Z}') \quad , \quad \mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) \geq \mathcal{O}(f, \mathcal{Z}')$$

b) Sind $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ beliebige Zerlegungen von $[a, b]$, so gilt

$$\mathcal{U}(f, \mathcal{Z}_1) \leq \mathcal{O}(f, \mathcal{Z}_2)$$

Aus Satz (21.15) folgt, daß die Menge aller Untersummen durch eine beliebige Obersumme nach oben beschränkt ist und daß die Menge aller Obersummen durch eine beliebige Untersumme nach unten beschränkt ist. Auf Grund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existieren dann das Supremum der Menge aller Untersummen und das Infimum der Menge aller Obersummen, so daß die im folgenden definierten unteren und oberen Integrale immer existieren:

(21.16) DEF: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion. Dann heißt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{\,\mathcal{U}(f,\mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]\,\}$$

das **untere Riemann–Integral von f über** $[a,b]$ und

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\{\,\mathcal{O}(f,\mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]\,\}$$

das **obere Riemann–Integral von f über** $[a,b]$

Zur Berechnung vom oberen und unteren Integral:

Wir nehmen uns eine Folge $(\mathcal{Z}_n)$ von Zerlegungen, bei denen die maximale Länge der Teilintervalle gegen 0 konvergiert. Dann ist

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{U}(f,\mathcal{Z}_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{O}(f,\mathcal{Z}_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Diese beiden Grenzwerte müssen nicht gleich sein (s. (21.18)). Aus Satz (21.15b) läßt sich folgern:

(21.17) SATZ: Für eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

(21.18) BEISPIEL: Die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$. Dann gilt: $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx < \overline{\int_0^1} f(x)\,dx$

Bew: Sei $\mathcal{Z}$ eine beliebige Zerlegung von $[0,1]$. Dann liegen in jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen, d.h. f nimmt in jedem Teilintervall sowohl den Wert 0 als auch den Wert 1 an. Damit ist $m_k = m_k(f,\mathcal{Z}) = 0$ und $M_k = M_k(f,\mathcal{Z}) = 1$. Folglich gilt für die Untersumme $\mathcal{U}(f,\mathcal{Z}) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta_k = \sum\limits_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta_k = 0$ und für die Obersumme $\mathcal{O}(f,\mathcal{Z}) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta_k = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_k = 1$ (Intervall–Länge). Jede Untersumme ist also 0 und jede Obersumme ist 1 , woraus folgt

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0 < 1 = \overline{\int_0^1} f(x)\,dx$$

(21.19) DEF: Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Gilt dann

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

so heißt f **(Riemann–) integrierbar auf** $[a,b]$. Man nennt in diesem Fall

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

das **bestimmte Integral** oder das **Riemann–Integral von** f **über** $[a,b]$.
(Bernhard Riemann , 1826–1866)

Bezeichnungen: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$: Integral von a nach b über f

a : untere b : obere Integrationsgrenze $[a,b]$: Integrationsintervall

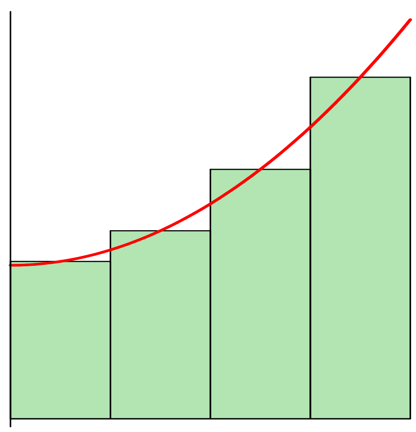
x : Integrationsvariable (der Name ist unerheblich: es gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$)

$f(x)$: Integrand.

(21.20) BEM: Man kann das bestimmte Integral auch mit Hilfe der sog. **Riemann–Summen** bilden. Dabei wird aus jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ ein beliebiger Punkt ξ_k herausgegriffen und die **Riemann–Summe**

$$\mathcal{S}(f,\mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta_k$$

gebildet. Es gilt immer $\mathcal{U}(f,\mathcal{Z}) \le \mathcal{S}(f,\mathcal{Z}) \le \mathcal{O}(f,\mathcal{Z})$.



In dem obigen Bild ist als ξ_k jeweils der Mittelpunkt des Teilintervalles $[x_{k-1}, x_k]$ gewählt.

Ist f integrierbar und ist $(\mathcal{Z}_n)$ eine Folge von Zerlegungen, bei denen die maximale Länge der Teilintervalle gegen 0 konvergiert, so gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(f,\mathcal{Z}_n) = \int_a^b f(x)\,dx$

Der folgende Satz, den wir hier nicht beweisen werden, macht Aussagen über die Existenz des bestimmten Integrals. Für den Beweis von Teil a) wird benötigt, daß f auf dem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig stetig ist.

(21.21) SATZ: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Dann gilt:

a) Ist f stetig, so ist f integrierbar auf $[a,b]$

b) Ist f beschränkt und monoton, so ist f integrierbar auf $[a,b]$.

BEM: Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion, so gilt:

$$f \text{ differenzierbar} \implies f \text{ stetig} \implies f \text{ integrierbar}$$

Es gilt aber keine Umkehrung! (Man mache sich das an geeigneten Beispielen klar!)

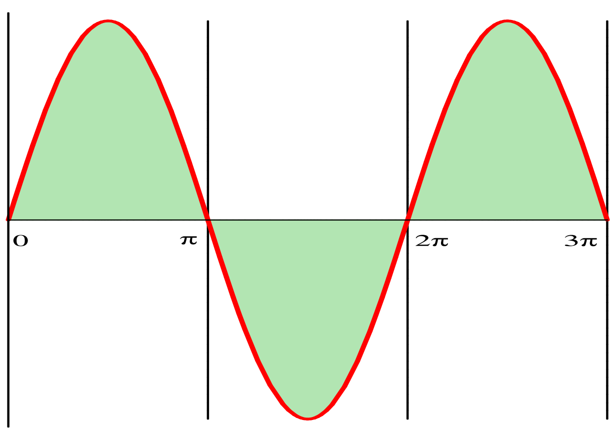
(21.22) SATZ: $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien integrierbare Funktionen. Dann folgt:

a) $f + g$ ist integrierbar, und es gilt $\displaystyle\int_a^b (\, f(x) + g(x)\,)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

b) Für jedes $c \in [a,b]$ gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

(21.23) DEF: Man setzt: **a)** $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \;=\; -\int_b^a f(x)\, dx$, **b)** $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0$

(21.24) BEM: Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und bezeichne I den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x–Achse. Ist dann $f(x) \geq 0$ auf $[a,b]$, so gilt $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, ist f negativ auf $[a,b]$, so gilt $I = \left| \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \right|$. Kann f positiv und negativ sein, so setzt sich der gesuchte Flächeninhalt additiv aus einzelnen Flächen über solchen Teilintervallen von $[a,b]$ zusammen, auf denen die Funktion ein einheitliches Vorzeichen hat.



Um also den Inhalt I der Fläche zwischen dem Graphen der Sinus–Funktion auf dem Intervall $[0, 3\pi]$ und der x–Achse zu bestimmen, rechnet man

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx \right| + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(x)\,dx$$

C) Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

Es soll jetzt eine Verbindung zwischen den beiden Integralbegriffen hergestellt werden.

(21.25) SATZ: Jede stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion F_0, die definiert ist durch $\quad F_0(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a, b]$.

Bew: Man kann zeigen: Für jedes $x \in [a, b]$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h}$ und ist gleich $f(x)$. Hierbei ist nach (21.22b)

$$F_0(x+h) - F_0(x) \;=\; \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \;=\; \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

(21.26) SATZ: Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, und sei F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a) \;=\; : F(x)\,\Big|_a^b$$

Bew: Für die Stammfunktion F_0 aus (21.25) gilt $F_0(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$ und $F_0(b) = \int_a^b f(x)\,dx$. Ist nun F eine beliebige Stammfunktion von f, so gibt es nach (21.2) eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = F_0(x) + C$. Folglich

$$F(b) - F(a) = (F_0(b) + C) - (F_0(a) + C) = F_0(b) + C - F_0(a) - C = F_0(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Beispiele: **a)** $\displaystyle\int_a^b (2x+3)\,dx = x^2 + 3x\,\Big|_a^b = (b^2 + 3b) - (a^2 + 3a)$ (vgl. (21.13b))

b) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x^2+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x\,\Big|_{-1}^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 1\right) = (9+3) - \frac{-1-3}{3} = 12 + \frac{4}{3} = 13\frac{1}{3}$

c) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = e^x\,\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$ **d)** $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln(x)\,\Big|_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx = \sin(x)\,\Big|_0^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$

(21.27) BEM: Die Integrationsregeln für unbestimmte Integrale aus Teil A) sind jetzt auch für bestimmte Integrale richtig. So gilt unter den jeweils erforderlichen Voraussetzungen:

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \qquad (21.5)$

b) $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du \qquad (21.7)$

c) $\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \qquad (21.9)$

D) Uneigentliche Integrale

Bisher war die betrachtete Funktion f auf einem **abgeschlossenen** Intervall definiert und dort beschränkt. Wir wollen jetzt allgemeiner auch unbeschränkte Funktionen oder nicht beschränkte Intervalle als Definitionsbereiche betrachten. Man spricht in diesen Fällen dann von **uneigentlichen Integralen**

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und D ein Intervall.

1. Fall: $D = [a, b[\ ,\ b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Existiert $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$, so heißt das **uneigentliche Integral** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **konvergent**, und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$$

2. Fall: $D =]a, b]\ ,\ a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$

Existiert $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$, so heißt das **uneigentliche Integral** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **konvergent**, und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$$

3. Fall: $D =]a, b[\ ,\ a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Konvergieren für ein $c \in D$ die beiden uneigentlichen Integrale $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$, so setzt man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

und man sagt, daß das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existiert.

(21.28) BEISPIELE: **a)** $\boxed{\int_0^\infty e^{-t}\,dt \;=\; 1}$

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(-e^{-t}\Big|_0^x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1-e^{-x}\right) = 1$$

b) $\boxed{\int_1^\infty \frac{dt}{t} \qquad \text{existiert nicht}}$

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{dt}{t} = \lim_{x\to\infty} \ln(t)\Big|_0^x = \lim_{x\to\infty}\ln(x) = +\infty$$

c) $\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \;=\; \frac{\pi}{2}}$

$$\lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1^-}\left(\arcsin(x) - \underbrace{\arcsin(0)}_{=0}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

d) $\boxed{\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \pi}$

Dieses uneigentliche Integral existiert, da die beiden uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ und $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ existieren. Das uneigentliche Integral ist dann die Summe dieser beiden uneigentlichen Integrale:

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to-\infty}\arctan(t)\Big|_x^0 = \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\arctan(0)}_{=0} - \arctan(x)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\arctan(x)\right) =$$
$$-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Analog: $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. Damit ergibt sich definitionsgemäß:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$