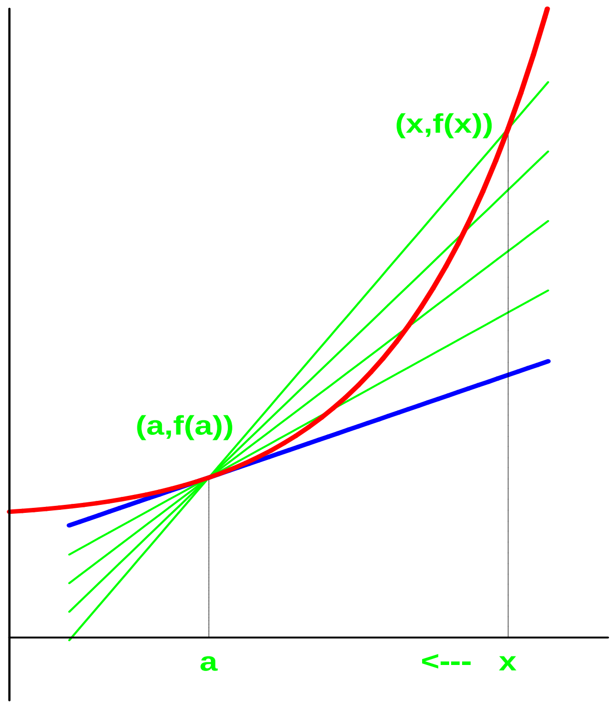
# §20. Differenzierbarkeit

**Das Tangentenproblem:** $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $a \in D$. Gesucht ist die **Tangente** an den Graphen von $f$ im Punkte $(a, f(a))$. Eine Tangente schneidet den Graphen in einer genügend kleinen Umgebung von $a$ in genau einem Punkt, **berührt** den Graphen. Anschaulich erhält man die Tangente in $a$ aus einer Sekante durch den Punkt $(a, f(a))$, indem man den zweiten Schnittpunkt $(x, f(x))$ gegen den Punkt $(a, f(a))$ streben läßt.




Es ist $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \tan(\alpha)$ die Steigung einer Sekante durch $(a, f(a))$ (s. Bild nächste Seite). Diese Sekante wird im Grenzfall $x \longrightarrow a$ zur Tangente. Der Grenzwert des Differenzenquotienten ist dann die Steigung der Tangente. Der Differenzenquotient liefert eine Funktion

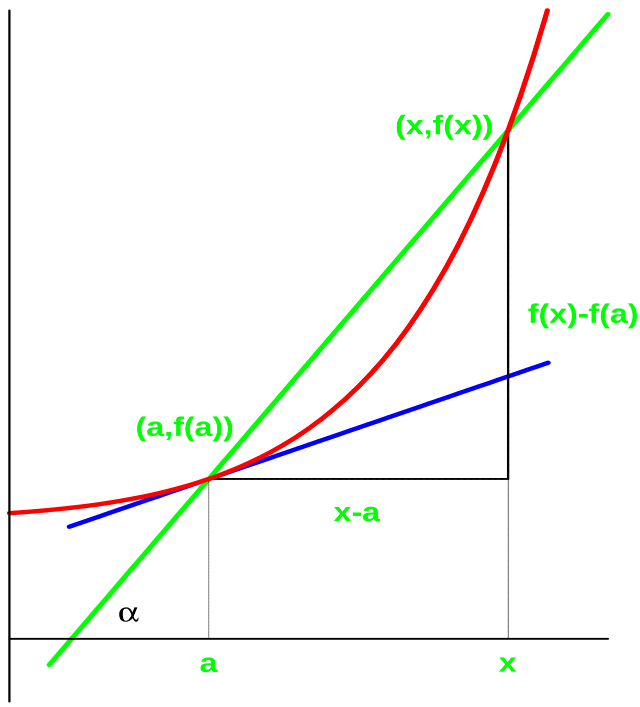
$$D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ist dann die Steigung der Tangente. In einer genügend kleinen Umgebung von $a$ kann also die Funktion $f$ durch etwas "Lineares" approximiert werden.

**(20.1) DEF:** $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $a \in D$.

**a)** $f$ heißt **in $a$ differenzierbar**, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ des Differenzenquotienten (in $\mathbb{R}$) existiert. Dieser Grenzwert heißt dann die **Ableitung von $f$ in $a$** und wird mit $\boldsymbol{f'(a)}$ bezeichnet.

**b)** $f$ heißt **(in $D$) differenzierbar**, wenn $f$ in jedem Punkt von $D$ differenzierbar ist.




**Bezeichnungen:** Es ist $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (falls dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert).

Eine andere Schreibweise für $f'(a)$ ist $\dfrac{df}{dx}(a)$ (lies: $df$ nach $dx$ von $f$ an der Stelle $a$).

Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so wird durch $x \longmapsto f'(x)$ eine Funktion $f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert (**erste Ableitung von** $f$). Ist $f'$ wieder in $a$ differenzierbar, so heißt

$$(f')'(a) \;=:\; f''(a)$$

die **zweite Ableitung** von $f$ in $a$. Allgemein ist die $n$–**te Ableitung** $f^{(n)}(a)$ von $f$ in $a$ rekursiv definiert durch

$$f^{(n)}(a) \;:=\; (f^{(n-1)})'(a) \quad (n \in \mathbb{N})$$

wobei der Rekursuionsanfang durch $f^{(0)}(a) := f(a)$ gegeben ist. Man schreibt $f', f'', f'''$ an Stelle von $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$.

Ist die Funktion $f$ differenzierbar und ist $f'$ eine stetige Funktion, so nennt man $f$ **stetig differenzierbar**.

**(20.2) BEISPIELE: a)** Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , $x \longmapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$ fest) ist differenzierbar, und es gilt $f' = 0$ (Nullabbildung).

**b)** Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , $x \longmapsto cx$ ($c \in \mathbb{R}$ fest) ist differenzierbar, und es ist $f' : x \longmapsto c$ eine konstante Funktion.

**c)** Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ , $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ ist differenzierbar, und es gilt $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

**d)** $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und es gilt $\exp' = \exp$.

__Bew:__ Es gilt $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ , wobei der rechtsstehende Quotient nur für $h \neq 0$ definiert ist. Man erhält für beliebiges $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h} = \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \frac{e^a \cdot e^h - e^a}{h} = e^a \frac{e^h - 1}{h} \overset{(*)}{\longrightarrow} e^a \cdot 1 = e^a \text{ für } h \to 0.$$

Folglich ist exp differenzierbar in $a$, und es gilt $\exp'(a) = \exp(a)$. Die Funktion exp ist also (auf ganz $\mathbb{R}$) differenzierbar mit $\exp' = \exp$.

Nachweis von $(*)$: Mit $e^h = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{h^k}{k!}$ ergibt sich:

$$\frac{1}{h}(e^h - 1) = \frac{1}{h}\left(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \ldots\right) = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \ldots \longrightarrow 1 \text{ für } h \to 0 ,$$

da eine Potenzreihe in ihrem Konvergenzbereich eine stetige Funktion darstellt. Es gilt also

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**e)** $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und es gilt $\sin' = \cos$.

__Bew:__ Nach (19.14a) gilt $\sin(x) - \sin(x') = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{x+x'}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{x-x'}{2}\right)$. Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{h}\left[\sin(a+h) - \sin(a)\right] = \frac{1}{h} \cdot 2\cos\left(\frac{2a+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) = \cos\left(\frac{2a+h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.$$ Folglich

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\sin(a+h) - \sin(a)\right] = \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2a+h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.$$

Der erste Grenzwert rechts ist gleich $\cos(a)$ , da cos stetig in 0 ist, der zweite ist 1 (dies zeigt man mit Hilfe der Potenzreihe von sin wie in (20.2d)). Damit folgt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\sin(a+h) - \sin(a)\right] = \cos(a) \cdot 1 = \cos(a).$$

Folglich ist die Sinus–Funktion differenzierbar (auf ganz $\mathbb{R}$), und es gilt $\sin' = \cos$.

Wir halten noch fest: $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

**f)** $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und es gilt $\cos' = -\sin$.

**g)** Die Betragsfunktion ist im Punkte 0 **nicht** differenzierbar.

Der Differenzenquotient im Punkte 0 ist $\dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$. Also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten im Punkte 0 **nicht**, so daß die Betragsfunktion im Punkte 0 nicht differenzierbar ist. Jedoch ist die Betragsfunktion im Punkte 0 stetig, so daß i.a. gilt:

**!Achtung:** $f$ stetig in $a$ $\not\Longrightarrow$ $f$ differenzierbar in $a$.

Es gilt jedoch die Umkehrung:

**(20.3) SATZ:** Ist die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkte $a \in D$ differenzierbar, so ist sie auch in $a$ stetig.

**Bew:** $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim\limits_{x\to a}\left[(x-a)\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] = \lim\limits_{x\to a}(x-a)\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} =$ $0\cdot f'(a)=0$. Also $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ , d.h. $f$ ist stetig in $a$.

**(20.4) SATZ: Differentiationsregeln**

Die Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien in $a \in D$ differenzierbar.

**a)** Dann sind auch die Funktionen $f \pm g, cf$ $(c \in \mathbb{R})$ und $f \cdot g$ in $a$ differenzierbar, und es gilt:

$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ **(Summenregel)**

$(cf)'(a) = cf'(a)$

$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)g'(a)$ **(Produktregel)**

**b)** Gilt $g(a) \neq 0$ , so ist auch die Funktion $\dfrac{f}{g} : \{x \mid x \in D, g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ in $a$ differenzierbar, und es gilt:

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ **(Quotientenregel)**

**Bew: a)** Die ersten beiden Regeln folgen aus den bekannten Grenzwertsätzen. Nachweis der Produktregel:

Sei $h := f \cdot g$. Wir bilden den Differenzenquotienten von $h$ in $a$:

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \frac{[f(x)-f(a)]\cdot g(x) + f(a)\cdot[g(x)-g(a)]}{x-a} =$$

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)}\cdot\underbrace{g(x)}_{\to g(a)} + f(a)\cdot\underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)} \qquad (\text{für } x \to a)$$

(Hierbei wird benutzt, daß $g$ als differenzierbare Funktion nach (20.3) in $a$ stetig ist !) Also:

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a).$$

**b)** Ist $g(a) \neq 0$, so ist $g$ auch in einer Umgebung von 0 ungleich Null, was aus der Stetigkeit von $g$ in $a$ folgt. Man beweist zunächst, daß die Funktion $\dfrac{1}{g}$ in $a$ differenzierbar ist mit $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g(a)^2}$. Danach wendet man die Produktregel auf $f\cdot\dfrac{1}{g} = \dfrac{f}{g}$ an.

**(20.5) FOLG:** **a)** Jede rationale Funktion ist differenzierbar

**b)** tan und cot sind differenzierbare Funktionen

**c)** Die hyperbolischen Funktionen sind differenzierbar.

**(20.6) SATZ: Ableitung der Umkehrfunktion**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von $f$ $(E = f(D))$.

Ist dann $f$ in $a \in D$ differenzierbar und gilt $f'(a) \neq 0$, so ist $g$ in $b := f(a) \in E$ differenzierbar, und es ist

$$g'(b) \;=\; \frac{1}{f'(a)} \;=\; \frac{1}{f'(g(b))}$$

**Bew:** Nach (18.16) ist $g = f^{-1} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ wieder stetig. Z.z.:

$$\lim_{\substack{y \to b \\ \text{in } E}} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \;=\; \frac{1}{f'(a)}$$

Sei $(y_n)$ eine beliebige Folge in $E \setminus \{b\}$, die gegen $b$ konvergiert. Da $f : D \longrightarrow E$ bijektiv ist, gibt es $x_n \in D \setminus \{a\}$ mit $y_n = f(x_n)$ $(\Longleftrightarrow \quad x_n = g(y_n))$. Da $g$ in $b$ stetig ist, folgt:

$x_n = g(y_n) \longrightarrow g(b) = a$. Hieraus ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{f'(a)}$$

(Für $(*)$ ist die Voraussetzung $f'(a) \neq 0$ erforderlich!) Folglich:

$$g'(b) = \lim_{y\to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

**(20.7) BEISPIELE:** **a)** Der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und es gilt $\ln'(x) \;=\; \dfrac{1}{x}$.

**b)** $\arcsin : \,]-1, 1[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und es ist $\arcsin'(x) \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ für $-1 < x < 1$.

**(20.8) SATZ: Kettenregel**

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen, und es sei $f(D) \subseteq E$. Sind dann $f$ in $a \in D$ und $g$ in $f(a) \in E$ differenzierbar, so ist auch die Hintereinanderausführung $g \circ f$ in $a$ differenzierbar, und es gilt:

$$(g \circ f)'(a) \;=\; g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

(Man nennt hier $g'(f(a))$ die **äußere** und $f'(a)$ die **innere Ableitung**).

**Beispiel:** $f(x) = \sin(\ln(x))$ $(x > 0)$ ist als Hintereinanderausführung zweier differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar, und es ist

$$f'(x) \;=\; \sin'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) \;=\; \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}$$

Es folgen noch einige theoretische Untersuchungen differenzierbarer Funktionen. Es sei $a < b$ vorausgesetzt.

**(20.9) DEF:** Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ hat in dem Punkt $x_0 \in D$ ein **lokales Minimum** (bzw. **Maximum**), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

**i)** $I := ]\, x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\, [\ \subseteq D$

**ii)** $\forall x \in I : f(x) \geq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \leq f(x_0)$ ).

Sammelbegriff: **lokales Extremum**.

**(20.10) SATZ:** Besitzt die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum und ist $f$ in $x_0$ differenzierbar, so folgt: $f'(x_0) = 0$.

**Bew:** $f$ besitze in $x_0$ ein lokales Maximum, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \; ]\, x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\, [\; =: I$$

In $I$ gilt damit: $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Sei nun $(x_n)$ eine Folge in $D$ mit $x_n < x_0 \ \ \forall n$ und $(x_n) \to x_0$. Dann folgt $x_n \in I \ \ \forall n \geq n_0$ und damit

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \;\geq\; 0$$

da der Zähler $\leq 0$ und der Nenner $< 0$ ist.

Sei nun $(x'_n)$ eine Folge in $D$ mit $x'_n > x_0 \ \ \forall n$ und $(x'_n) \to x_0$. Dann folgt $x'_n \in I \ \ \forall n \geq n_1$ und damit

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{f(x'_n) - f(x_0)}{x'_n - x_0} \;\leq\; 0$$

da der Zähler $\leq 0$ und der Nenner $> 0$ ist. Folglich: $f'(x_0) \;=\; 0$.

**Beispiele:** **a)** Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^2 + 1$ hat in 0 ein (lokales) Minimum, da $f(x) = x^2 + 1 \geq 1 = f(1)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist $f'(x) = 2x$, also $f'(0) = 0$.

**b)** Aus $f'(x_0) = 0$ muß noch nicht folgen, daß $f$ in $x_0$ ein lokales Extremum besitzt.

**Gegenbeispiel:** $f(x) = x^3$ , $f'(x) = 3x^2$ , $f'(0) = 0$, aber $f$ hat in 0 kein lokales Extremum.

**c)** Eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt ihr Minimum und ihr Maximum an (18.13). Geschieht dies aber am Rand, so muß dort nicht notwendig die 1. Ableitung verschwinden:

Für $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x$ gilt: $f$ nimmt in 0 das Minimum und in 1 das Maximum an. Dort gilt aber: $f'(0) = 1 \neq 0$ , $f'(1) = 1 \neq 0$.

**(20.11) SATZ: Satz von Rolle**

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Ist dann $f$ in $]\,a,b\,[$ differenzierbar, so gibt es ein $x_0 \in \,]\,a,b\,[$ mit $f'(x_0) = 0$ .

**(20.12) SATZ: Mittelwertsatz der Differentialrechnung**

Die Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und in $]\,a,b\,[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $x_0 \in \,]\,a,b\,[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

**Bew:** Definiere die Funktion $g : [\,a,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. Dann ist $g$ stetig in $[\,a,b\,]$ und differenzierbar in $]\,a,b\,[$, und es gilt $g(a) = f(a) = g(b)$. Nach dem Satz von Rolle (20.11) existiert ein $x_0 \in \,]\,a,b\,[$ mit $g'(x_0) = 0$ , also

$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Hieraus folgt die Behauptung.

**(20.13) FOLG:** $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und in $]\,a,b\,[$ differenzierbar. Gilt dann $f'(x) = 0$ für alle $x \in \,]\,a,b\,[$ , so ist $f$ eine konstante Funktion.

**(20.14) FOLG: Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetig und in $]\,a,b\,[$ differenzierbar. Es gelte $g'(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in \,]\,a,b\,[$. Dann existiert ein $x_0 \in \,]\,a,b\,[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Es folgen zwei Anwendungen:

**1) Monotonie von Funktionen**

**(20.15) SATZ:** Die Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und in $]\,a,b\,[$ differenzierbar. Dann gilt:

**a)** $\forall\, x \in \,]\,a,b\,[ \; : \; f'(x) \geq 0 \implies f$ ist monoton wachsend

**b)** $\forall\, x \in \,]\,a,b\,[ \; : \; f'(x) > 0 \implies f$ ist streng monoton wachsend

**c)** $\forall\, x \in \,]\,a,b\,[ \; : \; f'(x) \leq 0 \implies f$ ist monoton fallend

**d)** $\forall\, x \in \,]\,a,b\,[ \; : \; f'(x) < 0 \implies f$ ist streng monoton fallend.

**Beispiel:** $\ln : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, da $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums:

**(20.16) SATZ:** Die Funktion $f : ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und in dem Punkte $x_0 \in ]a,b[$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

**a)** $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \implies f$ hat in $x_0$ ein lokales Minimum

**b)** $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \implies f$ hat in $x_0$ ein lokales Maximum.

**Bew:** **a)** Nach Voraussetzung gilt $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall\, x : 0 < |x - x_0| < \varepsilon$$

d.h. für alle $x$ mit $x_0 - \varepsilon < x < x - 0$ oder $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$. Wegen $f'(x_0) = 0$ folgt hieraus:

$f'(x) < 0$ für alle $x$ mit $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ (hier ist nämlich $x - x_0 < 0$) und

$f'(x) > 0$ für alle $x$ mit $x_0 < x < x - 0 + \varepsilon$ (hier ist nämlich $x - x_0 > 0$).

Nach (20.15) ist $f$ in $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng monoton fallend und in $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ streng monoton wachsend, so daß $f$ in $x_0$ ein lokales Minimum besizt.

**b)** Analog.

**!Achtung:** Die Bedingungen sind **hinreichend**, aber **nicht notwendig**.
Die Funktion $f(x) = x^4 + 1$ hat in 0 ein (lokales) Minimum, aber $f'(0) = f''(0) = 0$.

### 2) Unbestimmte Ausdrücke

Wir wollen sog. "unbestimmte Ausdrücke" wie etwa $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ berechnen. Diese sind z.B. von der Form "$\dfrac{0}{0}$" oder "$\dfrac{\infty}{\infty}$". Zum Beweis des folgenden Satzes wird der verallgemeinerte Mittelwertsatz benötigt.

**(20.17) SATZ: Regel von L'Hospital**
Die Funktionen $f, g : ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar, und es gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in ]a,b[$. Es sei $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ oder $\pm\infty$. Existiert dann $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, so folgt

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**(20.18) BEISPIELE:** **a)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1$

**b)** $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\frac{1}{\sin(x)} \cos(x)}{\frac{-1}{\sin^2(x)}} = \lim\limits_{x \to 0+} (-\sin(x)\cos(x)) = 0$

**c)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{n x^{n-1}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{n x^n} = 0 \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$