§19. Spezielle Funktionen

A) Exponential– und Logarithmusfunktion

Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Diese Potenzreihe ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent (16.21a). Wir fassen die bekannten Eigenschaften von exp in dem folgenden Satz zusammen:

(19.1) SATZ: Eigenschaften der exp–**Funktion**

a) $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$ (Euler'sche Zahl)

b) $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2) \;\; \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

c) exp ist stetig und streng monoton wachsend

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \exp(x) = +\infty$

e) $\text{Bild}(\exp) = \mathbb{R}_{>0}$.

Bew: **b)** Funktionalgleichung von exp (16.21e)

c) (18.3d) und Aufgabe 52b) **d)** Aufgabe 52c) **e)** (18.11).

exp bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$ ab. Daher gibt es die Umkehrfunktion $\exp^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(19.2) DEF: Die Umkehrfunktion $\exp^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **natürliche Logarithmusfunktion** und wird mit ln bezeichnet.

(19.3) SATZ: Eigenschaften der ln–**Funktion**

a) $\ln = \exp^{-1}$

b) $\ln(\exp(x)) = x \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exp(\ln(y)) = y \;\; \forall\, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

c) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

d) $\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln(y_1) + \ln(y_2) \;\; \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_{>0}$

e) ln ist stetig und streng monoton wachsend

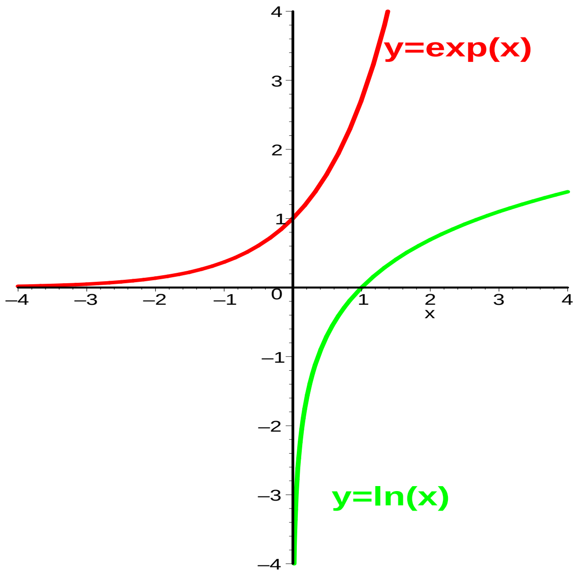
f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Bew: **d)** Es gibt $x_k \in \mathbb{R}$ mit $y_k = \exp(x_k)$ $(k = 1, 2)$ $(\Longrightarrow \;\; x_k = \ln(y_k))$.

$\underline{\underline{\ln(y_1 \cdot y_2)}} = \ln(\exp(x_1) \cdot \exp(x_2)) = \ln(\exp(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = \underline{\underline{\ln(y_1) + \ln(y_2)}}$

e) (18.16)

Den **Graphen** von ln erhält man durch Spiegeln des Graphen von exp an der Geraden $y = x$.



(19.4) DEF: Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ eine feste reelle Zahl. Die Funktion

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{definiert} \quad \text{durch} \quad \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln(a)) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

heißt die **Exponentialfunktion zur Basis** a.

$\underline{a = 1}$ $\exp_1(x) = \exp(x \underbrace{\ln(1)}_{=0}) = \exp(0) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\underline{a = e}$ $\exp_e(x) = \exp(x \underbrace{\ln(e)}_{=1}) = \exp(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, d.h. $\exp_e = \exp$.

Die Exponentialfunktion zur Basis a hat entsprechende Eigenschaften wie exp:

(19.5) SATZ: Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

a) $\exp_a(0) = 1$, $\exp_a(1) = a$ **b)** $\exp_a(x) > 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) $\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

d) $\exp_a(-x) = \dfrac{1}{\exp_a(x)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(19.6) BEM: Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $\exp_a(r) = a^r \ \ \forall\, r \in \mathbb{Q}$.

Bew: Analog zu Aufgabe 43.

Wir nehmen dies zum Anlaß für die folgende Definition:

(19.7) DEF: Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist die **Potenz** a^x definiert durch

$$a^x := \exp_a(x) = \exp(x \cdot \ln(a))$$

Insbesondere gilt für $a = e$: $e^x = \exp(x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1}) = \exp(x)$.

Es gelten die gewohnten Potenzregeln:

(19.8) BEM: Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ **b)** $(a^x)^y = a^{xy}$ **c)** $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ **d)** $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

(19.9) SATZ: Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$. Dann gilt:

a) $\exp_a$ ist stetig

b) $\exp_a$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend.

c) $\operatorname{Bild}(\exp_a) = \mathbb{R}_{>0}$.

Die Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ von $\exp_a$ heißt **Logarithmus zur Basis** a.

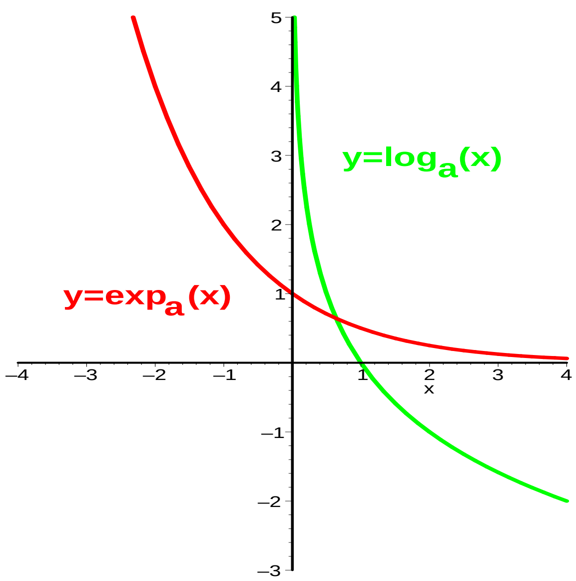
$\log_a$ ist wieder stetig und streng monoton, und es gilt:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_{>0}$$

Bew: Für alle $x > 0$ gilt: $x = \exp_a(\log_a(x)) = \exp(\log_a(x) \cdot \ln(a))$

$\Longrightarrow \quad \ln(x) = \log_a(x) \cdot \ln(a) \quad \Longrightarrow \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, da $\ln(a) \neq 0$.

Das folgende Bild zeigt $\exp_a$ und $\log_a$ für $a = 0.5$.



BEM: $a = 10$: Der **dekadische Logarithmus** $\log_{10}$ ist die Umkehrfunktion von $x \longmapsto 10^x$

$a = e$: $\log_e = \ln$ ist der natürliche Logarithmus.

B) Die trigonometrischen Funktionen

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $e^{ix} = \exp(ix)$ eine komplexe Zahl, die sich in der Form

$$e^{ix} = \mathrm{Re}(e^{ix}) + i \cdot \mathrm{Im}(e^{ix})$$

darstellen läßt (arithmetische Darstellung von e^{ix}). Wir definieren:

(19.10) DEF: Die **Cosinus–Funktion** $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und die **Sinus–Funktion** $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind definiert durch:

$$\cos(x) := \mathrm{Re}(e^{ix}) \quad , \quad \sin(x) := \mathrm{Im}(e^{ix}) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$$

Wir werden später sehen, daß diese Definition mit der "bekannten" Definition von cos und sin als Seitenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck übereinstimmen. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{ix} = \exp(ix) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!} \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \overset{(**)}{=}$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{=\mathrm{Re}(e^{ix})} \;+\; i \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=\mathrm{Im}(e^{ix})} \;=\; \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

$(*)$ Eine absolut konvergente Reihe darf umgeordnet werden (16.17)

$(**)$ s. Aufg. 20b).

(19.11) SATZ: Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\cos(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ **b)** $\sin(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

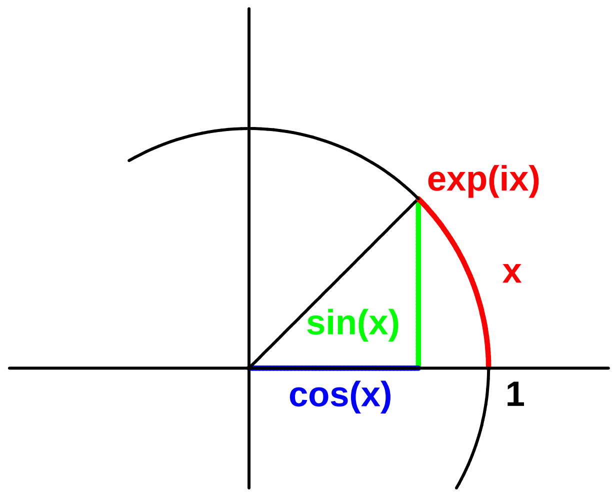
c) $e^{ix} \;=\; \cos(x) + i \cdot \sin(x)$ (**Euler'sche Formel**).

Da die Potenzreihe von e^{ix} für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent ist, gilt dies auch für die Potenzreihen von $\cos(x)$ und $\sin(x)$.

(19.12) SATZ: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: **a)** $|e^{ix}| = 1$

b) $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ **c)** $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ **d)** $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Wir wollen nun eine geometrische Interpreation von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ geben. Wegen (19.12a) liegen die komplexen Zahlen der Form e^{ix} alle auf dem Einheitskreis, d.h. dem Kreis um 0 mit Radius 1. Real– und Imaginärteil von e^{ix} sind dann gerade die Längen der Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypothenuse gleich 1 (Radius des Einheitskreises) ist. x selbst ist dabei, wie man sich überlegen kann, die Länge des Kreisbogens von 1 nach e^{ix}.



(19.13) SATZ: (Additionstheoreme) Für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\cos(x + x') = \cos(x)\cos(x') - \sin(x)\sin(x')$

b) $\sin(x + x') = \cos(x)\sin(x') + \sin(x)\cos(x')$.

(19.14) FOLG: Für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\sin(x) - \sin(x') = 2\cos\left(\frac{x + x'}{2}\right)\sin\left(\frac{x - x'}{2}\right)$

b) $\cos(x) - \cos(x') = -2\sin\left(\frac{x + x'}{2}\right)\sin\left(\frac{x - x'}{2}\right)$.

(19.15) SATZ: Die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind (auf ganz $\mathbb{R}$) stetig.

(19.16) SATZ: Die Funktion cos hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

(19.17) DEF: Die eindeutig bestimmte Nullstelle der Cosinus–Funktion im Intervall $[0, 2]$ wird mit $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ bezeichnet.

(19.18) SATZ: Es gilt:

a) $\exp\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) = i$ **b)** $\exp(i \cdot \pi) = -1$

c) $\exp\left(i \cdot \frac{3\pi}{2}\right) = -i$ **d)** $\exp(i \cdot 2\pi) = 1$.

(19.19) Tabelle von Funktionswerten

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0

(19.21) FOLG: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

b) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

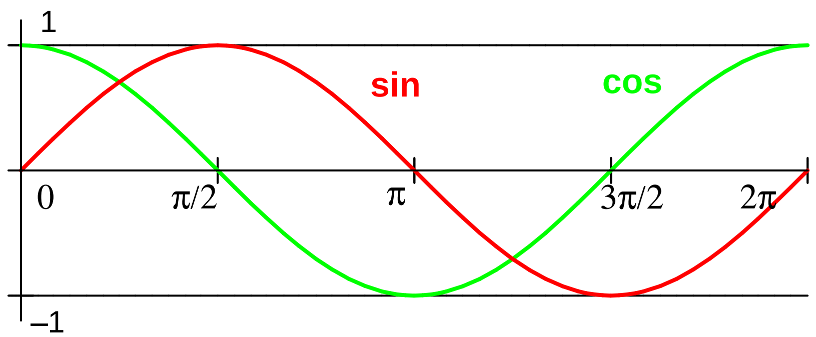
c) $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

(19.22) FOLG: Nullstellen von cos **und** sin

a) $x \in \mathbb{R}: \quad \cos(x) = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

b) $x \in \mathbb{R}: \quad \sin(x) = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : \ x = k\pi$.

Graph von cos und sin: Die Funktionen sin und cos sind nach (19.21a) **periodisch** von der Periode 2π. Daher setzt sich der gezeichnete Graph auf dem Intervall $[\,0, 2\pi\,]$ nach beiden Seiten ins Unendliche fort.

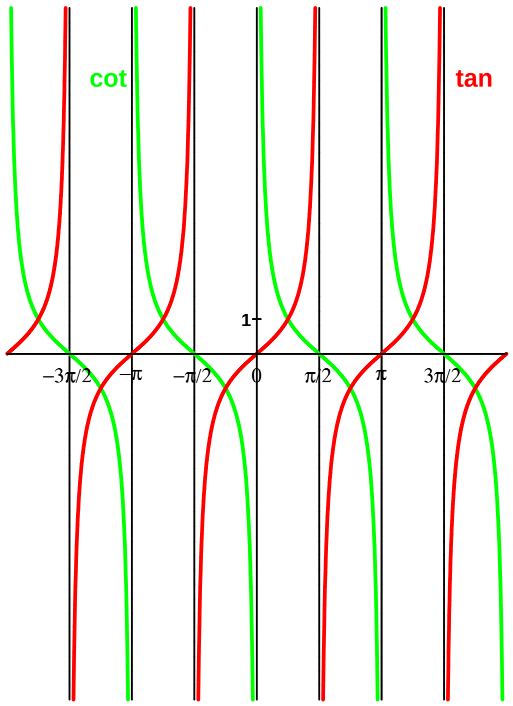


(19.23) DEF: a) Die **Tangens–Funktion**

$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch $\tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

b) Die **Cotangens–Funktion** $\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch $\cot(x) := \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Graph von tan und cot:



<u>(19.24) SATZ:</u> **a)** Die Cosinus–Funktion ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ stetig und streng monoton fallend, und es gilt $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. Es existiert die Umkehrfunktion $\cos^{-1} = \arccos : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ (**Arcuscosinus–Funktion**). Diese ist wieder stetig und streng monoton fallend.

b) Die Sinus–Funktion ist auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ stetig und streng monoton wachsend, und es gilt $\sin(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]) = [-1, 1]$. Es existiert die Umkehrfunktion $\sin^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ (**Arcussinus–Funktion**). Diese ist wieder stetig und streng monoton wachsend.

c) Die Tangens–Funktion ist auf dem Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ stetig und streng monoton wachsend, und es gilt $\tan(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[) = \mathbb{R}$. Es existiert die Umkehrfunktion $\tan^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (**Arcustangens–Funktion**). Diese ist wieder stetig und streng monoton wachsend.

d) Die Cotangens–Funktion ist auf dem Intervall $]0, \pi[$ stetig und streng monoton fallend, und es gilt $\cot(]0, \pi[) = \mathbb{R}$. Es existiert die Umkehrfunktion $\cot^{-1} = \mathrm{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (**Arcuscotangens–Funktion**). Diese ist wieder stetig und streng monoton fallend.

Bem: Es handelt sich bei den Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen um deren sog. **Hauptwerte**.

Bew: Die Aussagen ergeben sich alle aus (18.16).

a) Wir stellen für diesen Fall einige Formeln auf:

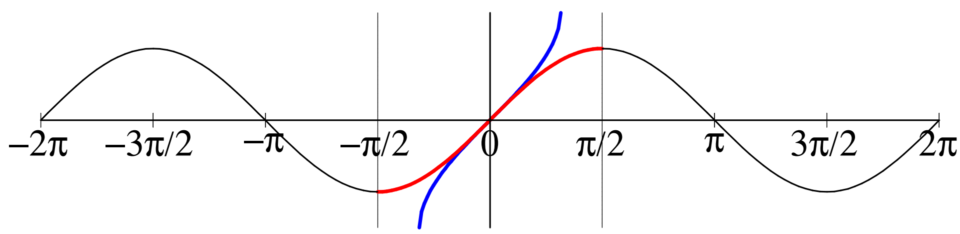
$\arccos(\cos(x)) = x \quad \forall\, x \in [0,\pi] \qquad \cos(\arccos(y)) = y \quad \forall\, y \in [-1,1]$

$\arccos(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \cos(x) \quad (x \in [0,\pi]\ ,\ y \in [-1,1])$

$\cos(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \arccos(1) = 0 \qquad\qquad \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2} \qquad\qquad \cos(\pi) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \arccos(-1) = \dfrac{\pi}{2}$

Graph von **arcsin**:



C) Hyperbolische Funktionen

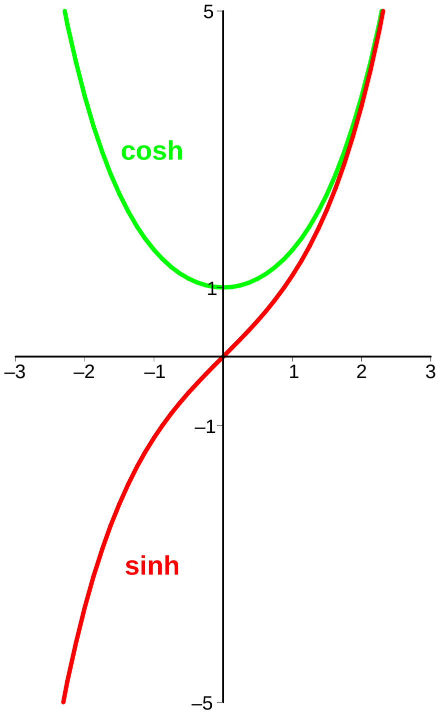
(19.25) DEF: **a)** Die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\sinh(x) := \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$, heißt **Sinus hyperbolicus**

b) Die Funktion $\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\cosh(x) := \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$, heißt **Cosinus hyperbolicus**

c) Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\tanh(x) := \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ für $x \in \mathbb{R}$, heißt **Tangens hyperbolicus**

d) Die Funktion $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\coth(x) := \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ für $x \in \mathbb{R}$, heißt **Cotangens hyperbolicus**.

Die Graphen von **sinh** und **cosh** sehen folgendermaßen aus:



In einem Bereich, in dem eine der hyperbolischen Funktionen streng monoton ist, gibt es eine Umkehrfunktion, deren Name mit **Area** begonnen wird:

$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bijektiv: $\sinh^{-1} =: \operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (**Area Sinus hyperbolicus**)

$\cosh : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow [1, +\infty]$ bijektiv: $\cosh^{-1} =: \operatorname{arcosh} : [1, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$ bijektiv: $\tanh^{-1} =: \operatorname{artanh} :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\coth : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ bijektiv: $\coth^{-1} =: \operatorname{arcosh} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$