§18. Stetige Funktionen

Wir betrachten die folgenden Beispiele von Funktionen und ihre Grenzwerte im Punkte 0:

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x + 1 \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert und ist gleich $f(0)$.

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \neq 0 \\ 2 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

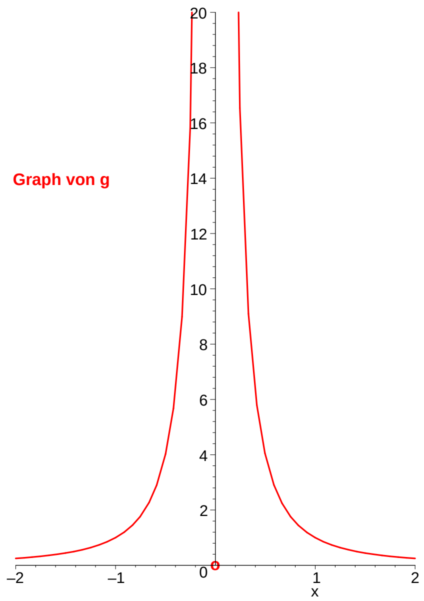
Hier existieren die beiden einseitigen Grenzwerte im Punkte 0 und sind gleich 1, aber $f(0) = 2$.

3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0 \\ x+1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0) \; , \; \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, d.h. der Grenzwert im Punkte 0 existiert nicht.

4) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$, d.h. $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ existiert nicht (in $\mathbb{R}$).



(18.1) DEF: Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) f heißt **stetig im Punkte** $a \in D$, wenn der Grenzwert von f im Punkte a (in $\mathbb{R}$) existiert und wenn gilt: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

b) f heißt **stetig (auf D)**, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

(18.2) BEM: **a)** Die Stetigkeit von $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkte $a \in D$ ist äquivalent zu dem folgenden: Für jede Folge (x_n) in D mit $(x_n) \longrightarrow a$ folgt $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

b) Ist $D = [\,a, b\,]$, so läßt sich in a höchstens der **rechtsseitige** Grenzwert und in b der linksseitige Grenzwert bilden. Gilt $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$ so heißt f **rechtsseitig stetig im Punkte** a. Analog: **Linksseitige Stetigkeit in** b.

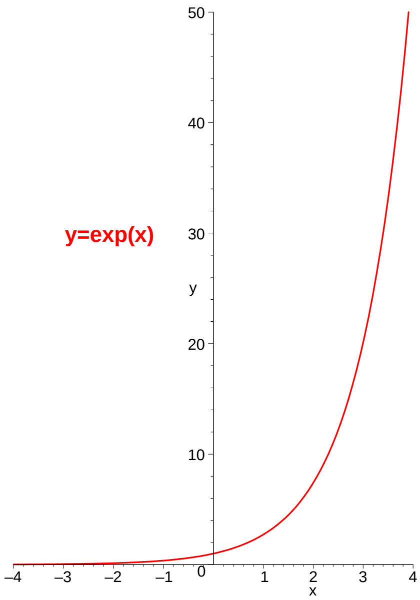
c) f ist in a **nicht** stetig, wenn entweder $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ in $\mathbb{R}$ nicht existiert, oder wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ zwar existiert, aber von $f(a)$ verschieden ist.

(18.3) BEISPIELE: **a)** Jede konstante Funktion ist stetig.

b) $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ und $-\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ sind stetig.

c) Die Betragsfunktion ist stetig.

d) Die Exponentialfunktion ist stetig.



e) Die Vorzeichen–Funktion ist in 0 nicht stetig.

f) Die Floor–Funktion ist in allen Punkten z $(z \in \mathbb{Z})$ nicht stetig.

(18.4) SATZ: Die Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien im Punkte $a \in D$ stetig.

a) Dann sind auch die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und rf $(r \in \mathbb{R})$ in a stetig.

b) Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion $\dfrac{f}{g} : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D' := \{x | x \in D, g(x) \neq 0\}$ in a stetig.

(18.5) FOLG: Polynomfunktionen und rationale Funktionen sind (auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen) stetige Funktionen.

(18.6) SATZ: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. f sei im Punkte $a \in D$ stetig und g sei in $f(a) \in E$ stetig. Dann ist die Hintereinanderausführung $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkte a stetig.

Beispiel: Die Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = \exp(x^2 - 3x + 4)$ ist stetig als Hintereinanderausführung der beiden stetigen Funktionen $x \longmapsto x^2 - 3x + 4$ und exp.

(18.7) BEM: Die Hintereinanderausführung zweier stetiger Funktionen ist wieder stetig.

(18.8) SATZ: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $f(c) = 0$.

BEM: $f(a) \cdot f(b) < 0$ bedeutet entweder $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ oder umgekehrt $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, d.h. $f(a)$ und $f(b)$ sind beide von 0 verschieden und haben entgegengesetztes Vorzeichen.

(18.9) FOLG: Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y_0 < f(b)$ (bzw. $f(b) < y_0 < f(a)$) ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) = y_0$.

BEM: Eine stetige Funktion nimmt also zwischen zwei Funktionswerten jeden Wert an, hat dort also keine "Löcher".

(18.10) FOLG: Jede Polynomfunktion ungeraden Grades besitzt (mindestens) eine reelle Nullstelle.

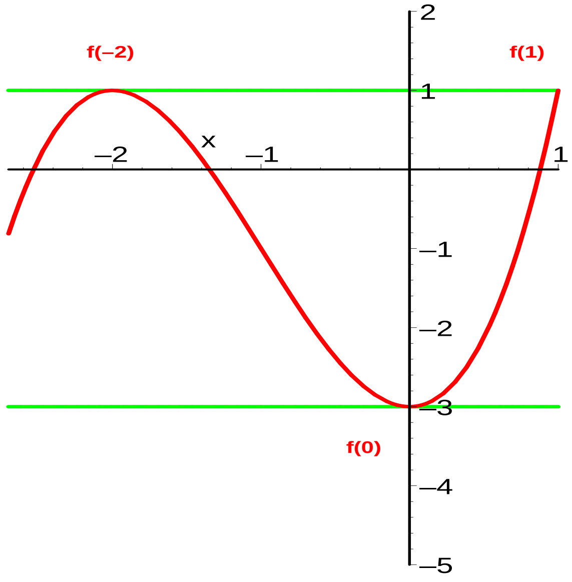
(18.11) FOLG: $\mathrm{Bild}(\exp) = \mathbb{R}_{>0}$.

(18.12) DEF: Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, wenn es eine Konstante $M \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit der Eigenschaft:

$$|f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in D$$

(18.13) SATZ: Satz vom Minimum und Maximum

Jede auf einem **abgeschlossenen** Intervall stetige Funktion $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an, d.h. ex gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $\inf(\text{Bild}(f)) = f(x_1)$ und $\sup(\text{Bild}(f)) = f(x_2)$.



(18.14) DEF: Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt

a) monoton wachsend, wenn gilt: $\forall\, x, x' \in D \,:\, x < x' \implies f(x) \leq f(x')$

b) streng monoton wachsend, wenn gilt: $\forall\, x, x' \in D \,:\, x < x' \implies f(x) < f(x')$

c) monoton fallend, wenn gilt: $\forall\, x, x' \in D \,:\, x < x' \implies f(x) \geq f(x')$

d) streng monoton fallend, wenn gilt: $\forall\, x, x' \in D \,:\, x < x' \implies f(x) > f(x')$.

Beispiele: a) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend (s. Aufg. 52b).

b) sign:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist monoton wachsend

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -x$ ist streng monoton fallend

d) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ ist **nicht** monoton

Aber: $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ ist streng monoton wachsend.

(18.15) BEM: Jede streng monotone Funktion ist injektiv.

(18.16) SATZ: Satz von der Stetigkeit der Umkehrfunktion

Für eine stetige, streng monoton wachsende Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

a) $\mathrm{Bild}(f) = [f(a), f(b)]$

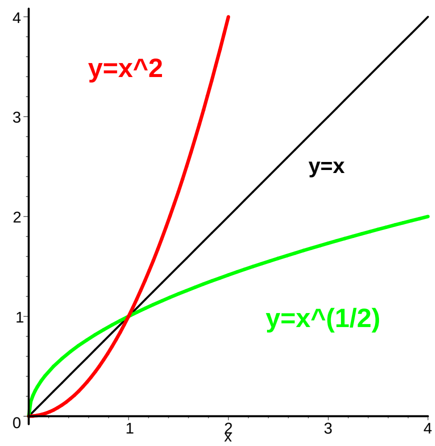
b) Es existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Diese ist wieder stetig und streng monoton wachsend.

Ein entsprechendes Ergebnis gilt für stetige, streng monoton fallende Funktionen.

Beispiel: $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist stetig und streng monoton wachsend, und es gilt $\mathrm{Bild}(f) = [0, 4]$. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0, 4] \longrightarrow [0, 2], \ x \longmapsto \sqrt{x}$$

ist wieder stetig und streng monoton wachsend.

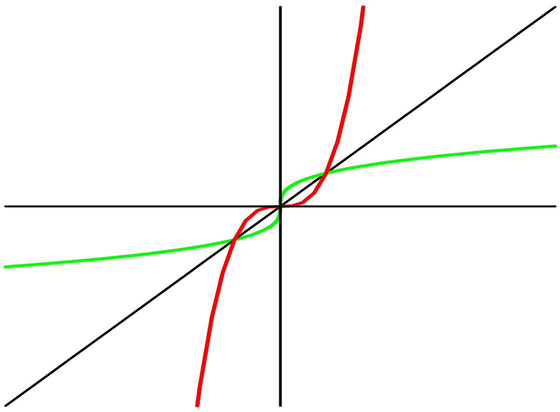


Dieses Beispiel läßt sich verallgemeinern:

(18.17) BEISPIEL: Für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ist die Funktion $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$ stetig und streng monoton wachsend, und es gilt $\mathrm{Bild}(f_n) = \mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion $f_n^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ ist wieder stetig und monoton wachsend. f_n^{-1} heißt n**–te Wurzelfunktion**.

Ist n **ungerade**, so ist $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$ bijektiv und stetig, und die Umkehrfunktion $f_n^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ ist auf **ganz** $\mathbb{R}$ definiert, und dort wieder stetig und streng monoton wachsend.

Wir sehen im folgenden das Bild der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \longmapsto x^3$ (rot) und ihrer Umkehrfunktion $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ (grün).



(18.18) SATZ: $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$**–Definition der Stetigkeit**

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $a \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) f ist im Punkte a stetig

b) $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists\, \delta \in \mathbb{R}_{>0}\, \forall\, x \in D \,:\, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

BEM: **a)** Der Beweis folgt sofort aus (17.7).

b) Ist f stetig auf D, so hängt das δ i.a. vom ε und vom Punkte a ab. Ist δ von $a \in D$ unabhängig, so spricht man von **gleichmäßiger Stetigkeit**.

c) Man kann zeigen, daß jede Funktion, die auf einem abgeschlossenen Intervall stetig ist, dort gleichmäßig stetig ist.