§17. Grenzwerte von Funktionen

A) Reelle Funktionen

(17.1) DEF: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **reelle Funktion**. Weitere Bezeichnungen:

D heißt der **Definitionsbereich** von f

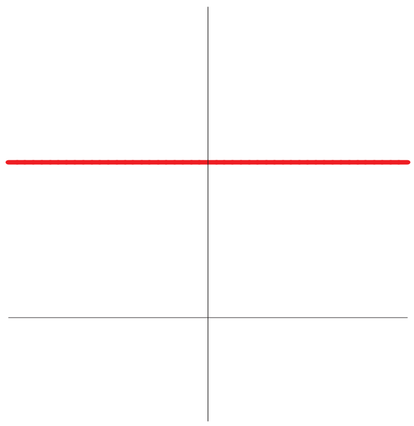
$\mathrm{Bild}(f) := f(D) = \{ f(x) \mid x \in D \} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathrm{G}_f := \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq D \times \mathbb{R}$ **Graph** von f.

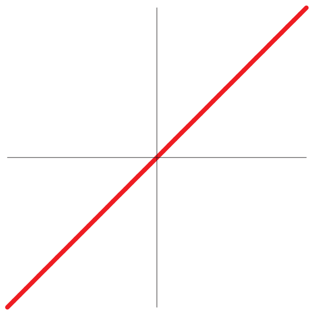
Hauptaufgabe der reellen Analysis: Untersuchung von reellwertigen Funktionen

Stichworte: Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit.

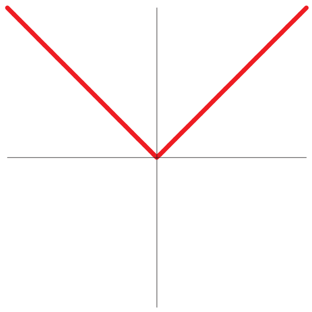
(17.2) BEISPIELE: **a)** Konstante Funktion $k : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto c$ $(c \in \mathbb{R}$ fest)



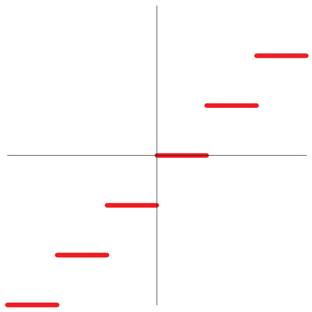
b) Identische Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$



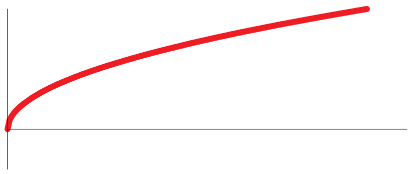
c) Betragsfunktion $abs : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto |x| \quad (\ \lim_{x\to 0} \mathrm{abs}(x) = 0\ )$



d) Die Floor–Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \qquad \left(\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 0-} g(x) = -1 \right)$



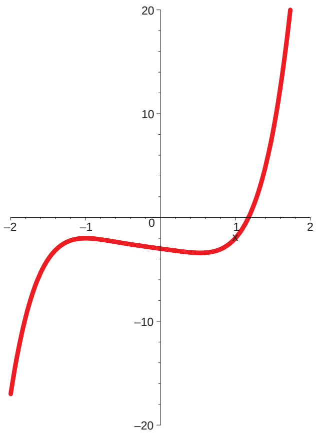
e) Wurzelfunktion $w : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \sqrt{x} \qquad \left(\lim\limits_{x\to 0+} w(x) = 0, \lim\limits_{x\to +\infty} w(x) = +\infty \right)$



f) Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ feste Zahlen)

(Konkretes Beispiel hier: $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto x^5 + x^4 - x - 3$

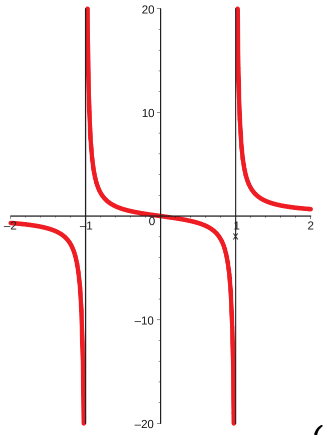
$\left(\lim\limits_{x\to -\infty} p(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to +\infty} p(x) = +\infty \right)$



g) Rationale Funktion: p, q Polynomfunktionen, $D := \{x | x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0\}$

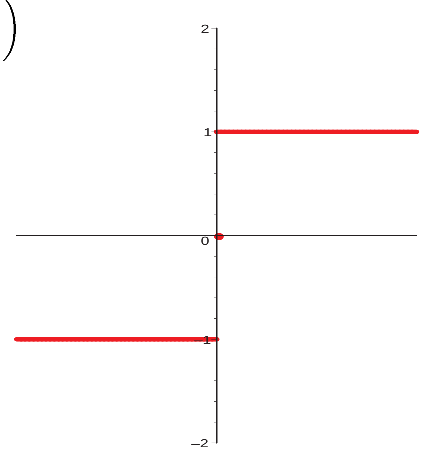
$r : D \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \dfrac{p(x)}{q(x)} \qquad \left(\text{auch: } r = \dfrac{p}{q}\right)$

(Konkretes Beispiel hier: $\left(\lim\limits_{x \to 1^-} r(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to 1^+} r(x) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} r(x) = 0\right)$



h) Vorzeichenfunktion sign: $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

$\left(\lim\limits_{x \to 0^+} \text{sign}\,(x) = 1,\ \lim\limits_{x \to 0^-} \text{sign}\,(x) = -1\right)$

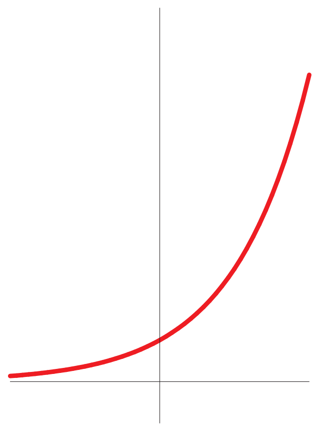


i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Der Graph dieser Funktion läßt sich nicht zeichnen!

j) Die reelle Exponentialfunktion: $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$.

$\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 0} \exp(x) = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \right)$



<u>**(17.3) BEM:**</u> Von zwei Funktionen lassen sich lassen sich Summe, Produkt und Quotient bilden und unter gewissen Voraussetzungen auch die Hintereinanderausführung.

a) $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen, $r \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $f + g \ , \ f \cdot g \ , \ rf : D \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle $x \in D$ definiert durch

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \\ (rf)(x) &:= rf(x) \end{aligned}$$

Ist $D' := \{ x \mid x \in D, g(x) \neq 0 \}$, so ist die Funktion $\dfrac{f}{g} : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\left(\frac{f}{g} \right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\forall\, x \in D')$$

b) Sind $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$, so ist die **Hintereinanderausführung** (oder **Komposition**) $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (\forall\, x \in D)$$

B) Der Grenzwert einer reellen Funktion

In vielen Fällen ist es nötig, eine Funktion in der Umgebung eines Punktes a zu untersuchen, in dem die Funktion entweder gar nicht definiert ist, oder in dem eine "Unregelmäßigkeit" vorkommt (etwa ein "Sprung"). Dazu betrachtet man die Funktionswerte von Punkten des Definitionsbereiches in der Nähe von diesem Punkt a und nähert sich dem Punkte a immer mehr. Wir legen zunächst einige Sprechweisen fest:

Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen und liegen alle Glieder in einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$, so nennt man (a_n) eine **Folge in** T. **Beispiel:** $(1 - 1/n)$ ist eine Folge in dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$.

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt ein **Berührungspunkt** einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$, wenn es eine Folge in T gibt, die gegen a konvergiert. Alle Punkte aus T sind Berührungspunkte von T, es kann aber auch Berührungspunkte von T geben, die nicht in T liegen. Mit $\overline{T}$ wird die Menge aller Berührungspunkte von T bezeichnet. Dann gilt $T \subseteq \overline{T}$, wobei auch $T \neq \overline{T}$ sein kann. **Beispiel:** Für $T = \,]1, 2[\, \subseteq \mathbb{R}$ (offenes Intervall) gilt: $\overline{T} = [1, 2]$ (abgeschlossenes Intervall).

(17.4) DEF: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine reellwertige Funktion, $a \in \overline{D}$ und $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

a) c heißt **Grenzwert von f im Punkte** a, wenn gilt:

Für jede gegen a konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte gegen c.

Bezeichnung: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

b) c heißt **linksseitiger Grenzwert von f im Punkte** a, wenn gilt:
Für jede gegen a konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\underline{x_n < a \ \forall\, n \in \mathbb{N}}$ konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte gegen c.

Bezeichnung: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c$

c) c heißt **rechtsseitiger Grenzwert von f im Punkte** a, wenn gilt:
Für jede gegen a konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\underline{x_n > a \ \forall\, n \in \mathbb{N}}$ konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte gegen c.

Bezeichnung: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = c$

e) c heißt **Grenzwert von f in** $+\infty$, wenn gilt:

Für jede gegen $+\infty$ bestimmt divergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte gegen c.

Bezeichnung: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$

f) c heißt **Grenzwert von f in** $-\infty$, wenn gilt:

Für jede gegen $-\infty$ bestimmt divergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte gegen c.

Bezeichnung: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$

In den Anwendungen ist D häufig ein Intervall und a ein Punkt aus D oder einer der Randpunkte.

(17.5) BEISPIELE: **a)** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Es ist $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ und allgemein: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a^2 + 1 = f(a) \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sign}(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sign}(x) = +1$, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign}(x)$ existiert nicht.

c) $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \exp(x) = 1$

e) Sei $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion , $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_n \neq 0$ (a_n heißt dann der **Leitkoeffizient** von p). Es gilt

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } a_n > 0 \\ -\infty & \text{für } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } a_n > 0 \text{ und } n \text{ gerade} \\ -\infty & \text{für } a_n > 0 \text{ und } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

f) Seien p, q Polynomfunktionen mit den Leitkoeffizienten a_m bzw. b_n. Dann gilt

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } n > m \\ \dfrac{a_m}{b_n} & \text{für } m = n \\ +\infty & \text{für } m > n \end{cases}$$

(17.6) SATZ: Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Für $a \in \overline{D}$ gelte $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

a) $\lim\limits_{x \to a} (f \pm g)(x) = c \pm d$ **b)** $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = c \cdot d$ **c)** $\lim\limits_{x \to a} (rf)(x) = rc \quad (r \in \mathbb{R})$

d) $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{c}{d}$ falls $d \neq 0$.

Entsprechende Aussagen gelten auch für einseitige Grenzwerte.

Die folgende Charakterisierung findet man häufig in den Lehrbüchern:

(17.7) SATZ: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion, $a \in \overline{D}, c \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

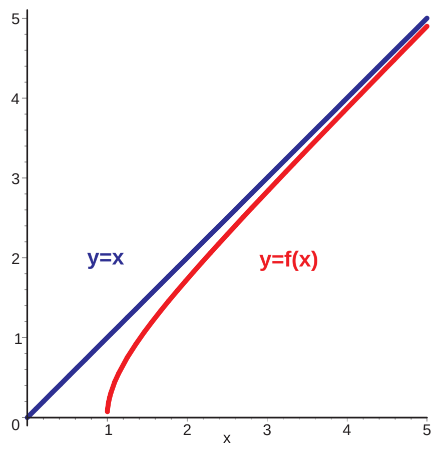
a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

b) $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists\, \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall\, x \in D : |x - a| < \delta \implies |f(x) - c| < \varepsilon$

C) Wachstumsvergleich zweier Funktionen

Wir benutzen den in B) eingeführten Begriff des Grenzwertes einer Funktion, um das Wachstumsverhalten zweier Funktionen in einem Punkt zu vergleichen. So besitzt z.B. die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ die beiden Geraden $y = x$ und $y = -x$ als "Asymptoten". Für großes x verhält sich der Hyperbelast im 1. Quadranten wie die Gerade $y = x$.

$f\ : [\,1, +\infty\,[\ \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$



$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \longrightarrow 1 \quad \text{für} \quad x \longrightarrow +\infty \quad \text{, d.h.} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(17.8) DEF: Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $g(x) \neq 0\ \forall\, x \in D$. Ferner sei $a \in \overline{D}$. Dann heißt f **asymptotisch gleich** g **im Punkte** a, (in Zeichen: $f(x) \sim g(x)$ (für $x \to a$)), wenn gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

(17.9) BEM: a) Asymptotische Gleichheit zweier Funktionen in einem Punkte a bedeutet, daß die Funktionen bei Annäherung an a dasselbe Wachstumsverhalten aufweisen.

b) Enthält D ein Intervall der Form $]\,b, +\infty\,[$, so bedeutet:

$$f(x) \sim g(x) \quad (\text{für } x \to +\infty) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Entsprechend ist $f(x) \sim g(x)$ (für $x \to -\infty$) definiert.

c) Beispiele: Es gilt: $x + \sqrt{x} \sim x$ (für $x \to +\infty$) , da $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

Es gilt: $x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ (für $x \to 0^+$) , da $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}+1 = 1$

d) Da sich die Grenzwertbildung im wesentlichen nur in der Nähe des Punktes a abspielt, genügt es, in der Definition (17.8) zu verlangen, daß g in einer Umgebung von a nicht verschwindet, d.h. daß es ein offenies Intervall I gibt mit $a \in I$ und $g(x) \neq 0 \ \forall\, x \in D \cap I$.

e) Wir übertragen den Begriff der asymptotischen Gleichheit auch auf Folgen: Seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen mit $b_n \neq 0 \ \forall\, n \geq n_0$.

$(a_n) \sim (b_n) \ :=\ \Longleftrightarrow \ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

f) Beispiel: $a_n = n^2+1$, $b_n = n^2+3n-1$ $\quad \displaystyle\frac{a_n}{b_n} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$, d.h. $(a_n) \sim (b_n)$.

(17.10) DEF: Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $g(x) \neq 0 \ \forall\, x \in D$. Ferner sei $a \in \overline{D}$. Dann definiert man:

$$\underline{f(x) = o(g(x)) \ \ (\text{für } x \to a)} \ :\Longleftrightarrow \ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(Lies: $f(x)$ ist klein–o von $g(x)$ für x gegen a).

$f(x) = o(g(x))$ (für $x \to a$) bedeutet, daß g bei Annäherung an a “schneller wächst“ als f.

(17.11) BEM: **a)** Auch diese Definietion ist wieder nur von lokaler Natur (s. (17.9e)). Als Voraussetzung an g braucht man nur zu verlangen, daß g in einer Umgebung von a nicht verschwindet.

b) Im Falle $]\,b, +\infty\,[\subseteq D$ definiert man:

$f(x) = o(g(x))$ (für $x \to +\infty$) $:\Longleftrightarrow \ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Analog für $x \longrightarrow -\infty$.

c) $f, g, h : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$, d.h.

$f(x) = o(h(x))$ (für $x \to 0^+$) und $g(x) = o(h(x))$ (für $x \to 0^+$).

Achtung!!! Dies sind **keine** Gleichheiten im mathematischen Sinne. Man darf diese “Gleichungen“ nur von links nach rechts lesen. Anderenfalls würde man $f(x) = g(x)$ folgern können.

d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Polynomfunktion mit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$\Longrightarrow \ \displaystyle\frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{a_0}{x^{n+1}} + \frac{a_1}{x^n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^2} + \frac{a_n}{x} \longrightarrow 0$ (für $x \to +\infty$),

d.h. $f(x) = o(x^n+1)$ (für $x \to +\infty$). x^{n+1} wächst also schneller gegen $+\infty$ als $f(x)$.

e) Ist $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion, so bedeutet
$f(x) = g(x) + o(h(x))$ (für $x \to a$) $\iff$ $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = o(h(x))$ (für $x \to a$).

f) Wir übertragen diese Begriffsbildung wieder auf Folgen (a_n) und (b_n) reeller Zahlen mit $b_n \neq 0 \ \forall\, n \geq n_0$:

$$a_n = o(b_n) \ :\iff \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \text{und} \quad a_n = c_n + o(b_n) \ :\iff \ a_n - c_n = o(b_n).$$

g) Beispiel: $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$, $b_n = n^3$. Dann gilt

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow 0 \text{ ,d.h. } a_n = o(n^3).$$

Damit haben wir den sog. o–Kalkül eingeführt. In der Informatik ist insbesondere für Aufwandsanalysen auch der O–Kalkül wichtig.

(17.12) DEF: Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $a \in \overline{D}$. Dann definiert man:
$f(x) = O(g(x))$ (für $x \to a$) $:\iff$ es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I$, so daß gilt:

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)| \quad \forall\, x \in D \cap I$$

(lies: "$f(x)$ ist groß-O von $g(x)$ für $x \to a$").

(17.13) BEM: **a)** Gilt $[\, b, +\infty [\, \subseteq D$ für ein $b \in \mathbb{R}$, so definiert man:
$f(x) = O(g(x))$ (für $x \to +\infty$) , falls es ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $x_0 \in [\, b, +\infty [$ gibt mit

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)| \quad \forall\, x > x_0$$

Analog für $x \to -\infty$.

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Polynomfunktion , $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^n$.

$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left| \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right| \leq C$ für $x \to +\infty$. Also
$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)| \ \forall\, x > x_0$ (x_0 geeignet gewählt), also
$f(x) = O(x^n)$ (für $x \to +\infty$).

c) Auch $f(x) = O(g(x))$ (für $x \to a$) ist keine Gleichung im mathematischen Sinne, man darf sie nur von links nach rechts lesen!

d) $f(x) = h(x) + O(g(x))$ (für $x \to a$) $\iff$ $f(x) - h(x) = O(g(x))$ (für $x \to a$).

e) Für zwei Folgen (a_n) und (b_n) definiert man:

$a_n = O(b_n) \;:\Longleftrightarrow\;$ es gibt ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \le C \cdot |b_n| \;\; \forall\, n \ge n_0$.

Sind fast alle Folgenglieder b_n von 0 verschieden, so ist $a_n = O(b_n)$ äquivalent dazu, daß die Folge $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ beschränkt ist. Ist (c_n) eine dritte Folge, so definiert man:

$a_n = c_n + O(b_n) \;:\Longleftrightarrow\; a_n - c_n = O(b_n)$.

f) $a_n := \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{1}{2}n(n+1) = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n \le \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n^2 = n^2 = 1 \cdot n^2$, also $|a_n| \le C|n^2|$ mit $C = 1$, d.h. $a_n = O(n^2)$.

Komplexität

Bei der asymptotischen Laufzeitkomplexität wird die Laufzeit eines Algorithmus für große n betrachtet, wobei n die Größe der Eingabedaten angibt.

Laufzeit	Bezeichnung	Anwachsen der Laufzeit bei Verdoppelung von n um den Faktor
$\boldsymbol{O(\log(n))}$	logarithmische Komplexität	$\log(2)$
$\boldsymbol{O(n)}$	lineare Komplexität	2
$\boldsymbol{O(n\log(n))}$	leicht überlineare Komplexität	2
$\boldsymbol{O(n^2)}$	quadratische Komplexität	4
$\boldsymbol{O(n^3)}$	kubische Komplexität	8
$\boldsymbol{O(2^n)}$	exponentielle Komplexität	n