§ 16. Unendliche Reihen

In $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ lassen sich endlich viele Zahlen $a_1, a_2, ... a_n$ aufsummieren. Zunächst ist nur die Summe zweier Zahlen definiert, dann aber läßt sich die Summe von n Zahlen ($n \geq 2$) rekursiv definieren durch (s. (6.10c))

$$(a_1 + \ldots + a_{n-1}) + a_n$$

Aufgrund der Gültigkeit des Assoziativgesetzes ist diese Bildung unabhängig von der Klammersetzung, so daß

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

eindeutig definiert ist. Wir wollen uns jetzt mit der Frage beschäftigen,ob man auch unendlich viele Zahlen aufsummieren kann. Daß hierbei Vorsicht geboten ist, zeigt das folgende Beispiel: Wir wollen (ganz naiv)

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$$

bilden. Diesen "Ausdruck" berechnen wir auf zwei Arten:

$$\underbrace{(1-1)}_{=0} + \underbrace{(1-1)}_{=0} + \underbrace{(1-1)}_{=0} + - \ldots = 0$$

$$1 + \underbrace{(-1+1)}_{=0} + \underbrace{(-1+1)}_{=0} + \underbrace{(-1+1)}_{=0} + - \ldots = 1$$

Es muß also erst einmal definiert werden, was wir unter der "Summe" von unendlich vielen Zahlen verstehen wollen Dies wird mit Hilfe eines Grenzüberganges geschehen. Sei also $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, und sei

$$s_n := a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die Summe der ersten n Folgenglieder. s_n heißt die n**–te Partialsumme** von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ läßt sich s_n bilden, da jeweils nur endlich viele Zahlen aufsummiert werden. Wir bilden also eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen, deren Grenzwert – falls er existiert – wir als "Summe" aller Folgenglieder ansehen können. In diesem Sinne können wir unendlich viele komplexe Zahlen aufsummieren.

(16.1) DEF: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Die **unendliche Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **konvergent** (**divergent**), wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergent (divergent) ist.

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so nennt man $\lim_{n\to\infty}(s_n)$ den **Wert** der unendlichen Reihe und schreibt $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}(s_n)}$.

(16.2) BEISPIELE: **a)** Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist konvergent und hat den Wert 1.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Diese Formel kann man durch Induktion beweisen oder durch die folgende Überlegung:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{(Partialbruchzerlegung)}$$

$$s_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(s_n) = 1, \quad \text{dh.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

b) Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

Die Folge der Partialsummen ist nämlich unbeschränkt

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{\geq \frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

c) Sei $a \in \mathbb{C}$. Die **geometrische Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ ist für $|a| < 1$ konvergent und für $|a| \geq 1$ divergent.

Die n–te Partialsumme ist $s_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ für $a \neq 1$ (6.5b) und $s_n = 1 + n$ für $a = 1$. Mit (15.10) folgt:

$$|a| < 1 \quad \Longrightarrow \quad (a^{n+1}) \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(s_n) = \underline{\frac{1}{1-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k}$$

Für $|a| \geq 1$ ist (a^k) keine Nullfolge, die Reihe also divergent nach dem folgenden Satz (16.3).

Speziell: $a = -1 \quad \Longrightarrow \quad s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (s_n)$ divergent

(Dies ist das Beispiel der vorigen Seite !)

(16.3) SATZ: Ist die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Bew: Es ist $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$.

(s_n) konvergent $\Longrightarrow$ (s_{n+1}) konvergent $\Longrightarrow$ (a_{n+1}) konvergent.

$$\lim(a_{n+1}) = \lim(s_{n+1}) - \lim(s_n) = 0$$

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ ist für $|a| \geq 1$ nicht konvergent, da (a^k) keine Nullfolge ist. (15.10)

Achtung! Die Bedingung ist nur notwendig, nicht aber hinreichend.

Gegenbeispiel: Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, $\left(\frac{1}{k}\right)$ aber eine Nullfolge.

(16.4) SATZ: Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ seien konvergent. Dann sind auch die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty}(ca_k)$ $\quad (c \in \mathbb{C})$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty}(ca_k) = c\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)$$

Bew: Mit (15.8)

Achtung! Das Produkt von Reihen läßt sich nicht so einfach bilden (s.später!)

(16.5) SATZ: (Konvergenzkriterium von Cauchy)

Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn gilt:

zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m \geq n_0(\varepsilon)$

Bew: Die Bedingung besagt gerade , daß die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen eine Cauchy-Folge und damit nach (15.29) konvergent ist; denn $\quad s_n - s_{m-1} = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$.

(16.6) DEF: Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

(16.7) SATZ: Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Bew: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist konvergent . Nach (16.5) gibt es zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\sum_{k=m}^{n} |a_k|\right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon \ \forall n \geq m \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon \ \forall n \geq m \geq n_0(\varepsilon) \overset{(16.5)}{\Longrightarrow}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad$ konvergent.

Achtung! Eine konvergente Reihe muß nicht absolut konvergent sein

Gegenbeispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ist konvergent (Leibniz-Kriterium, Beweis später)

$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent (harmonische Reihe).

Wie bei Folgen lassen sich unendliche Reihen komplexer Zahlen auf unendliche Reihen reeller Zahlen zurückführen:

(16.8) SATZ: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_k = b_k + ic_k$ $(b_k, c_k \in \mathbb{R}\ \forall\, k \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\iff$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent

b) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k + i \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$

Im folgenden werden wir daher **Reihen mit reellen Gliedern** genauer untersuchen.

(16.9) SATZ: Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit nichtnegativen reellen Gliedern (d.h. $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$).

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Bew: $s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$, d.h. (s_n) ist monoton wachsend.

Nach (15.16) ist eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge konvergent.

Umgekehrt ist jede konvergente Folge beschränkt (15.7).

(16.10) SATZ: Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann ist die **alternierende Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k$ konvergent, und es gilt $s_{2n} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k \leq s_{2n+1}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, wobei $s_m = \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} a_k$ die m–te Partialsumme ist.

(Gottfried Wilhelm **Leibniz** , 1646 – 1716)

Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ ist konvergent und hat den Wert $\ln(2)$.

(16.11) SATZ: Vergleichskriterien

$(a_k), (b_k)$ seien Folgen reeller Zahlen mit $0 \leq a_k \leq b_k\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt :

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent (**Majorantenkriterium**)

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent (**Minorantenkriterium**).

Bezeichnungen: **a)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt eine **konvergente Majorante** für $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt eine **divergente Minorante** für $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Bew: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Aus $a_k \leq b_k \;\forall\, k \in \mathbb{N}$ folgt $s_n \leq t_n \;\forall\, k \in \mathbb{N}$

a) $\sum b_k$ konvergent $\overset{(16.9)}{\Longrightarrow}$ (t_n) beschränkt. Wegen $0 \leq s_n \leq t_n$ ist dann auch die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so daß nach (16.9) die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist.

b) Annahme: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent. Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ nach a) konvergent. Widerspruch!

(16.12) BEISPIEL: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$ ist für alle $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{m \geq 2}$ konvergent.

$\boldsymbol{m = 2}$ **:** $k^2 \geq k(k-1) \;\forall\, k \in \mathbb{N} \implies 0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \;\forall k \geq 2 \implies$

$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist eine nach (16.2a) konvergente Majorante von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, so daß diese Reihe nach dem Majorantenkriterium (16.11a) konvergent ist.

$\boldsymbol{m \geq 3}$ **:** $k^m \geq k^2 \;\;\forall k \in \mathbb{N} \implies \frac{1}{k^m} \leq \frac{1}{k^2} \;\forall\, k \in \mathbb{N} \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$ ist konvergent.

In diesen Fällen ist es nicht mehr so einfach, die Werte der Reihen zu bestimmen. So gilt etwa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, was schon Leibniz bewiesen hat.

(16.13) SATZ: Quotientenkriterium

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sei eine unendliche Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Es gebe eine reelle Zahl q mit $\underline{0 < q < 1}$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1 \;\;\forall\, k \geq k_0$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Gibt es dagegen ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ für alle $k \geq k_0$, so divergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Bew: Die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$ haben dasselbe Konvergenzverhalten, aber im Falle der Konvergenz i.a. verschiedene Werte.
Wir brauchen daher nur den Fall $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \le q < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ zu betrachten.

$$a_{k+1} \le q \cdot a_k \le q^2 \cdot a_{k-1} \le \ldots \le q^k \cdot a_1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cdot a_1 = a_1 \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ ist konvergent , da $0 < q < 1$ (16.2c) . Nach (16.11a) ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+1}$ konvergent und damit auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Gilt $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1\ \forall k \in \mathbb{N}$, so folgt $a_{k+1} \ge a_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$, so daß (a_k) keine Nullfolge ist. Nach (16.3) ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

!Achtung! Für die Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ reicht nicht aus, daß für alle Quotienten $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ gilt. Ein Gegenbeispiel hierfür liefert die harmonische Reihe.

(16.14) FOLG: Sei (a_k) eine Folge mit $a_k \in \mathbb{R}_{>0} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Die Folge $\left(\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sei konvergent mit dem Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $a < 1 \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent

b) $a > 1 \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent

c) Im Falle $a = 1$ ist keine Aussage über das Konvergenzverhalten von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ möglich.

Bew: Es ist $a = \lim\limits_{k \to \infty} \left(\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right)$

$\underline{a < 1}$ Zu $\varepsilon := \dfrac{1-a}{2} > 0$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k} - a\right| < \varepsilon \quad \forall\, k \ge k_0$

$\implies \dfrac{a_{k+1}}{a_k} < a + \varepsilon < 1 \quad \forall\, k \ge k_0 \quad \overset{(16.13)}{\implies}$ Behauptung.

$\underline{a > 1}$ Zu $\varepsilon := \dfrac{1-a}{2} > 0$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k} - a\right| < \varepsilon \quad \forall\, k \ge k_0$

$\implies 1 < a - \varepsilon < \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \quad \forall\, k \ge k_0 \quad \overset{(16.13)}{\implies}$ Behauptung.

Im Falle $\underline{a = 1}$ läß t sich keine Aussage machen, wie die folgenden Beispiele b) und c) zeigen.

Beispiele: **a)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$ ist konvergent, da $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \dfrac{k!}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k+1} \longrightarrow 0 < 1$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ ist divergent, und $\dfrac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{k}} \longrightarrow 1$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent, und $\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{k^2}{(k+1)^2} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^2 \longrightarrow 1$

(16.15) SATZ: Wurzelkriterium

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sei eine unendliche Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Es gebe eine reelle Zahl q mit $\underline{0 < q < 1}$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1 \ \ \forall\, k \geq k_0$$

Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Gibt es dagegen ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{a_k} \geq 1 \ \ \forall\, k \geq k_0$, so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Bew: $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1 \implies a_k \leq q^k \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ ist eine konvergente Majorante von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

$\sqrt[k]{a_k} \geq 1 \implies a_k \geq 1 \implies (a_k)$ ist keine Nullfolge $\implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

(16.16) FOLG: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sei eine unendliche Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\sqrt[k]{a_k})$ sei konvergent mit dem Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $a < 1 \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent

b) $a > 1 \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent

c) Im Falle $a = 1$ ist keine Aussage über das Konvergenzverhalten von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ möglich.

Bew: Analog zum Beweis von (16.14).

Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ ist konvergent, da $\frac{1}{\sqrt[k]{k^k}} = \frac{1}{k} \longrightarrow 0$

Zwei Anwendungsbeispiele für absolut konvergente Reihen, die zeigen, daß sich solche Reihen weitgehend wie endliche Summen verhalten::

1. Problem: D̄arf man in eine konvergenten Reihe die Glieder beliebig umordnen?

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ ist konvergent , aber nicht absolut konvergent (=ln(2))

$$
\begin{aligned}
s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\right) \;=\; \frac{1}{2} \cdot s \quad \Longrightarrow \quad s = 0\ !
\end{aligned}
$$

Fazit: In einer konvergenten Reihe darf man nicht ohne weiteres die Glieder beliebig umordnen.

Man kann jedoch beweisen:

(16.17) SATZ: In einer absolut konvergenten Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ darf man die Glieder der Reihe beliebig umordnen. Die neue Reihe ist wieder absolut konvergent und hat denselben Grenzwert wie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Problem: Wie kann man das Produkt zweier Reihen bilden?

Wir wollen das Produkt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ zweier Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ so definieren, daß unter geeigneten Konvergenzvoraussetzungen $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ gilt. Die zunächst naheliegende gliedweise Multiplikation führt nicht zum Ziel:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^4}{36} \neq \frac{\pi^4}{90} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

Multiplizieren wir einmal zwei Partialsummen s_m und t_n distributiv aus und sortieren die Summanden etwas um:

$$s_m \cdot t_n \;=\; (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_m) \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n) \;=$$

$$\underbrace{a_1 b_1}_{=c_1} + \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{=c_2} + \underbrace{a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1}_{=c_3} + \underbrace{a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1}_{=c_4} + \ldots$$

Wir kommen zu der folgenden Definition:

(16.18) DEF: Das **Cauchy–Produkt** zweier Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ist definiert als die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k := \sum\limits_{j=1}^{k} a_j \cdot b_{k-j+1}$.

(16.19) BEISPIEL: Das Cauchy–Produkt der konvergenten Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ mit sich selbst ist divergent.

Bew: Sei $a_k := \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Dann gilt

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot a_{k-j+1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^j}{\sqrt{j}} \cdot \frac{(-1)^{k-j+1}}{\sqrt{k-j+1}} = (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}\sqrt{k-j+1}}$$

$$1 \le j \le k \implies \frac{1}{\sqrt{j}} \ge \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{k-j+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{k}} \implies \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k-j+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k}$$

$$\implies |c_k| = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}\sqrt{k-j+1}} \ge \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k} = k \cdot \frac{1}{k} = 1$$

Damit ist (c_k) keine Nullfolge, die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ also divergent nach (16.3). •

Man kann jedoch den folgenden Satz beweisen:

(16.20) SATZ: Das Cauchy–Produkt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ zweier **absolut konvergenter** Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ist wieder absolut konvergent, und es gilt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\right)$.

(16.21) Die Exponentialfunktion

a) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!}$ ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

Bew: Sei $z \in \mathbb{C}$ eine beliebige feste komplexe Zahl. Setze $a_k := \dfrac{z^k}{k!}$. Wir wenden das Quotientenkriterium auf die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ an.

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|z|^k} = \frac{|z|}{k+1} \longrightarrow 0 < 1$$

Nach (16.14) ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent, d.h. die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, und damit insbesondere auch konvergent (16.7).

b) Die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ $(\forall\, z \in \mathbb{C})$, heißt **komplexe Exponentialfunktion**.

c) Es gilt $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Wir wollen dies hier nicht beweisen, sondern nur ein Rechenbeispiel geben. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist eine Reihe mit positiven (reellen) Gliedern, so daß die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen streng monoton wachsend ist. Folglich gilt $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le e$.

n	s_n
0	1.0
1	2.0
2	2.5000000000000000000
3	2.6666666666666666667
4	2.7083333333333333333
5	2.7166666666666666667
6	2.7180555555555555556
7	2.7182539682539682540
8	2.7182787698412698413
9	2.7182815255731922399
10	2.7182818011463844797
19	2.7182818284590452349
20	2.7182818284590452353
21	2.7182818284590452354
e	2.7182818284590452354

Vergleicht man diese Werte mit den Werten der Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, so stellt man hier viel schnellere Konvergenz fest. Es gilt die folgende **Fehlerabschätzung**:

d) $|\exp(z) - s_n| \le 2\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le 1 + \frac{n}{2}$. Hierbei ist $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.

e) **Die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion**

Es gilt: $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$

<u>**Bew:**</u> Wir bilden das Cauchy–Produkt der beiden absolut konvergenten Reihen $\exp(z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z_1^k}{k!}}_{:=a_k}$ und $\exp(z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z_2^k}{k!}}_{:=b_k}$. Nach (16.20) ist dies die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j! \cdot (k-j)!} \cdot z_1^j \cdot z_2^{k-j}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot z_1^j \cdot z_2^{k-j} = \frac{1}{k!} \cdot (z_1 + z_2)^k$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\exp(z_1) \cdot \exp(z_2)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (z_1 + z_2)^k = \underline{\exp(z_1 + z_2)}$$

f) Es gilt $\exp(0) = 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) \neq 0$, $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$

<u>**Bew:**</u> $\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{0^0}{0!} + \underbrace{\frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \frac{0^3}{3!} + \ldots}_{=0} = 1$

$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z) \quad \Longrightarrow \quad \exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$

g) Es gilt: $\qquad \boldsymbol{\forall\, q \in \mathbb{Q} : \ \exp(q) = e^q}$

<u>**Bew:**</u> (s. Aufgabe 43)

Potenzreihen

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergent. Dies ermöglicht es, die Exponentialfunktion zu definieren. Viele andere wichtige mathematische Funktionen lassen sich durch ähnlich gebaute Reihen definieren. Sei (a_k) eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine **(formale) Potenzreihe**. Eine solche Reihe konvergiert in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$ konvergent ist. Es stellt sich das

Problem: Für welche komplexe Zahlen ist eine Potenzreihe konvergent?

Auf jeden Fall ist sie im Punkte $z_0 = 0$ konvergent.

(16.22) BEISPIELE: **a)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist nach (16.21a) für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergent.

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ ist als geometrische Reihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ konvergent, für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ dagegen divergent. Für $|z| < 1$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$. Die Potenzreihe ist also für alle Punkte des Inneren des Einheitskreises konvergent, man spricht daher auch von einem **Konvergenzkreis**.

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^k z^k$ ist nur für $z = 0$ konvergent.

Diese drei Beispiele sind typisch für das Konvergenzverhalten von Potenzreihen.

(16.23) SATZ: **a)** Konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ in einem Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, so konvergiert sie absolut in jedem Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| < |z_0|$.

b) Divergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ in einem Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, so divergiert sie auch in jedem Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| > |z_0|$.

(16.24) SATZ: Für eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gibt es genau eine Zahl $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$

ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$

ρ heißt der **Konvergenzradius** der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

BEM: $\rho = 0$ bedeutet Divergenz für alle $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, $\rho = \infty$ bedeutet absolute Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$.

(16.25) BEM: **a)** Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann konvergiert sie absolut in der offenen Kreisscheibe $K_\rho(0) = \{\, z \mid z \in \mathbb{C}, |z| < \rho \,\}$ und divergiert für $|z| > \rho$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \rho$ läßt sich allgemein keine Aussage über das Konvergenzverhalten machen.

b) Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\rho > 0$, so wird durch

$z \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Funktion $K_\rho(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert.

(16.26) SATZ: Es sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ρ. Dann gilt:

a) Konvergiert die Folge $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\sigma \in \mathbb{R}$, so folgt:

$$\rho \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma} & \text{falls } \sigma \neq 0 \\ \infty & \text{falls } \sigma = 0 \end{cases}$$

Ist die Folge $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so folgt $\rho = 0$.

b) Gilt $a_k \neq 0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}_0$ und konvergiert die Folge $\left(\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen $\sigma \in \mathbb{R}$, so folgt:

$$\rho \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma} & \text{falls } \sigma \neq 0 \\ \infty & \text{falls } \sigma = 0 \end{cases}$$

Ist die Folge $\left(\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ unbeschränkt, so folgt $\rho = 0$.

(16.27) BEISPIELE: **a)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^k z^k \;:\; \rho = 0$ **b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \;:\; \rho = 1$ (geom. Reihe!)

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^k}{k^2} \;:\; \rho = 1$ **d)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^k}{k} \;:\; \rho = 1$ **e)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{kz^k}{2^k} \;:\; \rho = 2$

f) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (z-1)^k \;:\; \rho = 1$ (konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < 1$, d.h. $\forall\, z \in \mathbb{C} : z \in K_1(1)$)

g) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$. Falls die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ den Konvergenzradius ρ hat, so ist die erste Potenzreihe konvergent für alle $z \in K_\rho(c)$.

Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen

Wir "wissen", daß sich jede reelle Zahl als ein Dezimalbruch darstellen läßt:

$$374,5 \;=\; \underline{\underline{3}} \cdot 10^2 + \underline{\underline{7}} \cdot 10^1 + \underline{\underline{4}} \cdot 10^0 + \underline{\underline{5}} \cdot 10^{-1}$$

$$0,125 \;=\; \underline{\underline{1}} \cdot 10^{-1} + \underline{\underline{2}} \cdot 10^{-2} + \underline{\underline{5}} \cdot 10^{-3}$$

$$0,333333333333\ldots \;=\; 0,\overline{3} \;=\; \underline{\underline{3}} \cdot 10^{-1} + \underline{\underline{3}} \cdot 10^{-2} + \underline{\underline{3}} \cdot 10^{-3} + \underline{\underline{3}} \cdot 10^{-4} + \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-k} \qquad (\textbf{unendliche Reihe!})$$

$$= 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \;=\; 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \qquad (\textbf{geometrische Reihe!})$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) \;=\; 3 \cdot \left(\frac{1}{\frac{9}{10}} - 1\right) \;=\; 3 \cdot \left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9}\right) \;=\; 3 \cdot \frac{1}{9} \;=\; \frac{1}{3}$$

Es gibt folgende Arten von Dezimalbrüchen:

1) abbrechend (endlich)

$\frac{1}{2} = 0,5 \qquad \frac{3}{8} = 0,375$

2) periodisch (unendlich)

$\frac{2}{3} = 0,6666666666666\ldots = 0,\overline{6} \qquad \frac{7}{33} = 0,2121212121\ldots = 0,\overline{21}$

3) nicht periodisch (unendlich)

$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488\ldots$

In den ersten beiden Fällen handelt es sich um **rationale** Zahlen, während $\sqrt{2}$ eine **irrationale** Zahl ist. Wir werden sehen, daß dies die typischen Fälle sind.

Für jede reelle Zahl $x > 0$ gilt

$$x = \lfloor x \rfloor + y \quad \text{mit} \quad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 0 \leq y < 1$$

Nach (9.22) (für $b = 10$) läßt sich jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ darstellen in der Form

$$a = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \quad \text{mit} \quad a_k \in \{0,1,2,\ldots,9\} \ (\forall\, k = 0,1,\ldots,n) \quad \text{und} \quad a_n \neq 0$$

Dafür schreibt man

$$a = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0 = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$$

Wir brauchen uns daher nur noch mit dem Fall einer reellen Zahl $y \ (0 < y < 1)$ zu beschäftigen.

(16.28) SATZ: Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen aus $\{0,1,2,\ldots,9\}$, so ist die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$ absolut konvergent.

Bew: Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$ ist eine konvergente Majorante der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$.

(16.29) SATZ: Zu jeder reellen Zahl $y \in]0,1[$ gibt es eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zahlen aus $\{0,1,2,\ldots,9\}$ mit

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

Bew: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $0 \leq a_k \leq 9 \ \ (\forall\, k = 1,2\ldots,n)$ **ii)** $s_n \leq y < s_n + 10^{-n}$ mit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$.

Dann folgt $|s_n - y| < \frac{1}{10^n}$. Da $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ eine Nullfolge ist, folgt

$$y = \lim_{n\to\infty}(s_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

Damit ist die **Existenz** einer **Dezimalbruchentwicklung** einer reellen Zahl $y \in]\,0,1\,[$ gesichert, und wir stellen die Frage nach der **Eindeutigkeit**.

I.a. sind die Dezimalziffern a_k von y eindeutig bestimmt. Es gibt jedoch eine Ausnahme: Es gilt $a_k = 9 = (10-1)$ für fast alle k, d.h. von einer Stelle $k_0 \in \mathbb{N}$ ab. In diesem Falle gibt es dann zwei Darstellungen dieser reellen Zahl, so ist z. B.

$$0,12\overline{9} = 0,13$$

$$y = 0,12\overline{9} = 1\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 9\cdot \sum_{k=3}^{\infty} 10^{-k}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} 10^{-k} = 10^{-3}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = 10^{-3}\cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 10^{-3}\cdot \frac{10}{10-1} = 10^{-2}\cdot \frac{1}{9}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{y}} = 1\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-2}+9\cdot\sum_{k=3}^{\infty} 10^{-k} = 1\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-2}+9\cdot10^{-2}\cdot\frac{1}{9} = 1\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-2}+10^{-2} = 1\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} = \underline{\underline{0,13}}$$

Verlangt man daher, daß in der Dezimaldarstellung unendlich viele Ziffern von 9 verschieden sind, so ist diese Darstellung eindeutig.

<u>(16.30) SATZ:</u> Dezimalbruchentwicklung einer reellen Zahl

Zu jeder reellen Zahl $x \geq 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und eindeutig bestimmte Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_n, a_k$ $(k \in \mathbb{N})$ aus $\{0,1,\ldots,9\}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $a_k \neq 9$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$.

ii) $x = b_n 10^n + b_{n-1}10^{n-1} + \ldots + b_1 10^1 + b_0 10^0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k} = b_n b_{n-1}\ldots b_1 b_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$

<u>Bew:</u> Es ist $x = \lfloor x \rfloor + y$ mit $0 \leq y < 1$. Die Darstellung für $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich aus (9.22), die von y aus (16.29).

Frage: Läßt sich an der Dezimalbruchdarstellung einer reellen Zahl x erkennen, ob x eine rationale Zahl ist?

Bei früheren Beispielen hatten wir gesehen, daß rationale Zahlen **periodische** Dezimalbruchentwicklungen hatten. Beispiele hierfür sind:

$$\frac{1}{3} = 0,333333333\ldots = 0,\overline{3} \qquad \frac{4}{33} = 0,1212121212\ldots = 0,\overline{12}$$

$$\frac{1}{8} = 0,1250000000000\ldots \qquad 0,3478213821382138\ldots = 0,347\overline{8213}$$

Bei einem periodischen Dezimalbruch wiederholen sich von einer Stelle ab ein oder mehrere Ziffern periodisch.

(16.31) DEF: Ein Dezimalbruch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$ heißt **periodisch**, wenn es eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a_{k+p} = a_k \quad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N}$$

(16.32) SATZ: Für eine reelle Zahl $x \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) x ist rational

b) Die Dezimalbruchentwicklung von x ist periodisch.

Bew: An Stelle eines formalen Beweises erklären wir die Methode an konkreten Beispielen.

a) $\Longrightarrow$ b)

Wir wandeln die rationale Zahl $\frac{41}{35}$ in einen Dezimalbruch um. Dazu führen wir Divisionen mit Rest aus:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
 & & 41 & = & 1 \cdot 35 & + & 6 \\
10 \cdot 6 & = & 60 & = & 1 \cdot 35 & + & 25 \\
\hline
10 \cdot 25 & = & 250 & = & 7 \cdot 35 & + & 5 \\
10 \cdot 5 & = & 50 & = & 1 \cdot 35 & + & 15 \\
10 \cdot 15 & = & 150 & = & 4 \cdot 35 & + & 10 \\
10 \cdot 10 & = & 100 & = & 2 \cdot 35 & + & 30 \\
10 \cdot 30 & = & 300 & = & 8 \cdot 35 & + & 20 \\
10 \cdot 20 & = & 200 & = & 5 \cdot 35 & + & 25 \\
\hline
10 \cdot 25 & = & 250 & = & 7 \cdot 35 & + & 5
\end{array}$$

Damit erhalten wir: $\frac{41}{35} = 1,1\overline{714285}$.

b) $\Longrightarrow$ a)

Wir wollen $x = 0,2\overline{21} = 0,2212121212121212\ldots$ in einen Bruch verwandeln:

$$x = \frac{2}{10} + \underline{\underline{\frac{2}{10^2}}} + \frac{1}{10^3} + \underline{\underline{\frac{2}{10^4}}} + \frac{1}{10^5} + \underline{\underline{\frac{2}{10^6}}} + \frac{1}{10^7} + \ldots$$

$$\overset{*)}{=} \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \ldots\right) + \frac{1}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \ldots\right)$$

$$= \frac{2}{10} + \left(\frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3}\right)\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \ldots\right)$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{21}{10^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^2}\right)^k = \frac{2}{10} + \frac{21}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{2}{10} + \frac{21}{10^3} \cdot \frac{100}{99}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{33} = \frac{2}{10} + \frac{7}{330} = \frac{66 + 7}{330} = \underline{\underline{\frac{73}{330}}}$$

$*)$ Umordnung einer absolut konvergenten Reihe nach (16.17)

(16.33) BEM: An Stelle der Zahl 10 kann man irgendeine natürliche Zahl $b \geq 2$ als Basiszahl für die Darstellung von reellen Zahlen benutzen. Im Falle $b = 2$ z.B. erhält man die Dualbruchentwicklung einer reellen Zahl. Die vorangegangenen Überlegungen lassen sich leicht übertragen: Bei einer Basiszahl $b \geq 2$ werden als Ziffern die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, b-1$ benutzt und man schreibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k} \;=\; (0, a_1 a_2 a_3 \ldots)_b$$

Dem Satz (16.30) entspricht dann das folgede Ergebnis:

SATZ: Entwicklung einer reellen Zahl zur Basis b

Zu jeder reellen Zahl $x \geq 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und eindeutig bestimmte Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n, a_k (k \in \mathbb{N})$ aus $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $a_k \neq b-1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$.

ii) $x = c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \ldots + c_1 b^1 + c_0 b^0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k} = (c_n c_{n-1} \ldots c_1 b_0, a_1 a_2 a_3 \ldots)_b$

Auch die anderen Ergebnisse gelten analog, insbesondere auch (16.32).