§15 Konvergente Folgen

Problemstellung: Bisher haben wir die reellen Zahlen als (abstrakt) gegebene Größen angesehen. Wir wollen nun aber die Frage nach dem „numerischen Wert" einer reellen Zahl, z.B. $\sqrt{2}$, stellen. Jede reelle Zahl läßt sich als Dezimalbruch darstellen (Um das richtig einzusehen, benötigen wir die Theorie der unendlichen Reihen aus §9.) Eine Zahl wie $\sqrt{2}$ läßt sich dann allerdings nicht mehr in endlich vielen Schritten exakt berechnen, sondern immer nur beliebig genau annähern (approximieren), wobei aber immer noch ein beliebig kleiner Fehler auftritt. Wir wollen den numerischen Wert von $\sqrt{2}$ bestimmen. Bekannt ist:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \qquad 1 < \sqrt{2} < 2$$

Wir werden eine „Folge" von reellen Zahlen angeben, die sich immer genauer $\sqrt{2}$ annähern: Die reellen Zahlen $a_n \quad (n \in \mathbb{N})$ seien rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1 \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Die Rechnung für die ersten Zahlen ergibt:

n	a_n	a_n^2
1	1	1
2	1.5	2.25
3	1.4166666666666666667	2.0069444444444444445
4	1.4142156862745098039	2.0000060073048827373
5	1.4142135623746899106	2.0000000000045109504
6	1.4142135623730950488	2.0000000000000000000

Wir sehen, daß sich a_n^2 immer genauer 2 nähert, so daß sich die Zahlen a_n immer genauer $\sqrt{2}$ nähern. Man sagt dann auch, daß die Folge (a_n) gegen $\sqrt{2}$ „konvergiert". Innerhalb der Rechengenauigkeit (20 Stellen hier) gilt also $a_6^2 = 2$ und damit $a_6 = \sqrt{2}$. Dies kann aber nicht der exakte Wert sein, denn $a_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Mit größer werdendem n nähern sich die Folgenglieder immer genauer dem Wert $\sqrt{2}$ oder: der Abstand der Folgenglieder zu $\sqrt{2}$ kann beliebig klein gemacht werden.

Wir wollen jetzt eine mathematische Präzisierung der erwähnten Begriffe vornehmen. Aus Gründen, die erst bei späteren Anwendungen klar werden, werden wir dies im Bereich der komplexen Zahlen tun.

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(dies schließt die Definition für den Betrag einer reellen Zahl mit ein) und $|z - w|$ ist der **Abstand** zweier komplexer Zahlen.

Bei einer **Folge** $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von Zahlen sind unendlich viele komplexe Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge vorgegeben (diese ist durch die Indizierung festgelegt).

Beispiele für Folgen

1) $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

2) $a_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

3) $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

4) $a_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ (unendlich viele Folgenglieder!)

5) $a_n = 3$ $(n \in \mathbb{N})$ $3, 3, 3, 3, 3, \ldots$ (konstante Folge,unendlich viele Folgenglieder)

6) $a_n = \frac{n-1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

7) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$

8) $a_1 = 1, a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ $1, \sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \ldots$
(rekursive Definition)

9) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} i$ $(n \in \mathbb{N})$
Die Zahlen a_n liegen auf der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten der Gauß'schen Zahlenebene.

10) $a_n = \frac{2}{n} + \frac{(-1)^n}{2^n} i$

11) $a_n = \frac{1}{n}\cos(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n}) i$

Bei einer Folge komplexer Zahlen ist also jedem $n \in \mathbb{N}$ eine komplexe Zahl a_n zugeordnet. Man hat es also genaugenommen mit einer Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ $(n \mapsto a_n)$, oder $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ $(n \mapsto a_n)$ zu tun.

(15.1) DEF: Eine (**unendliche**) **Folge komplexer Zahlen** ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$
Schreibweise: $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := f(n)$. Man nennt a_n das n**–te Folgenglied**. Sind alle Folgenglieder einer Folge reelle Zahlen, so spricht man von einer **(unendlichen) Folge reeller Zahlen**.

Entsprechend kann man eine Folge von Elementen aus einer Menge M als eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$ definieren. Schauen wir uns einige der obigen Beispiele etwas genauer an:

1) $a_n = \frac{1}{n}$ Die Folgenglieder kommen auf der reellen Achse von rechts der Zahl 0 beliebig nahe, ohne sie zu erreichen.

7) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ Annäherung an 0 von beiden Seiten auf der reellen Achse. Dies können wir auch so interpretieren: In jedem offenen **Intervall** $]-r, r[$ mit $r \in \mathbb{R}, r > 0$ liegen von einem Index an alle Folgenglieder, oder in jedem solchen Intervall liegen **fast alle** Folgenglieder. Höchstens endlich viele Folgenglieder liegen außerhalb.

6) $\qquad a_n = \dfrac{n-1}{n}$ $\qquad$ Annäherung an 1 von links.

9) Hier können wir sagen, daß in jedem **Kreis** $K_r(0) = \{z | z \in \mathbb{C}, |z-0| < r\}$ um 0 mit Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ von einer Stelle ab alle Folgenglieder liegen.

Wir kommen nun zu der grundlegenden Definition der Konvergenz einer Folge:

(15.2) DEF: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** , wenn es eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ gibt, so daß gilt: zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein Index $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Man sagt dann auch, daß die Folge (a_n) gegen a **konvergiert**, und a heißt **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert heißt eine **Nullfolge**. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt **divergent**.

(15.3) BEM: Wir schreiben die Definition formal auf: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt konvergent, wenn gilt:

$$\exists a \in \mathbb{C} \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

In dieser Form läßt sich einfacher sagen, was es bedeutet, daß eine Folge nicht konvergent ist:

$$\forall a \in \mathbb{C} \;\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists m \in \mathbb{N} : m \geq n \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon$$

Weitere Anmerkungen:

1) Mit dieser Definition wird mathematisch die anschauliche Vorstellung zum Ausdruck gebracht, daß die Folgenglieder einer konvergenten Folge dem Grenzwert beliebig nahe kommen. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, kann man ε sehr klein wählen, etwa $\varepsilon = 10^{-10}$ oder $\varepsilon = 10^{-100}$, und der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert wird dann von einer Stelle ab $< 10^{-100}$. ε ist so eine Art Fehlerschranke.

2) Der Index $n_0(\varepsilon)$ ist von ε abhängig: i.a. wird $n_0(\varepsilon)$ umso größer, je kleiner ε ist.

3) Das Problem bei der Anwendung der Definition für die Konvergenz einer Folge liegt darin, daß man zunächst den Grenzwert kennen oder zumindest vermuten muß. Dies ist aber häufig nicht der Fall: Was ist etwa der Grenzwert der rekursiv definierten Folge (a_n) mit $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$, falls er überhaupt existiert (Grenzwert ist $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$)? Später, nach Entwicklung der nötigen Theorie, lernen wir Kriterien kennen, die aus „internen“ Eigenschaften einer Folge auf deren Konvergenz schließen lassen.

(15.4) BEISPIEL:

a) $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

zz: zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Es gilt $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, da $\frac{1}{n} > 0$.

(Hilfsüberlegung: $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \overset{Aufg.16)}{\Longleftrightarrow} 0 < \frac{1}{\varepsilon} < n$)

Sei $n_0(\varepsilon) := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt dann $n \geq n_0(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$

also $n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ und damit $\frac{1}{n} < \varepsilon$

(Für $n_0(\varepsilon)$ kann man auch jede natürliche Zahl $> \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ wählen!)

Konkret: $\varepsilon = \frac{1}{5}$, es gilt $n_0(\varepsilon) := 6$ $\quad \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq 6$
Man könnte aber auch $n_0(\varepsilon) = 10$ oder 999 setzen! Für $\varepsilon = 10^{-3}$ ist $n_0(\varepsilon) := 1001$.

b) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent! $a_n := (-1)^n$
Annahme: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.
Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Dann existiert $n_0\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq n_0\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |(a_n - a) + (a - a_{n+1})| \overset{Dreiecksunglchg.}{\leq} |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

für $n \geq n_0(\varepsilon)$. Folglich $2 < 1$ Widerspruch!

c) Die konstante Folge (a_n) mit $a_n = c \quad \forall n$ ist konvergent mit c als Grenzwert.
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Dann gilt $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Setze also $n_0(\varepsilon) := 1$ für beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

d) Die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

Da $\left(\frac{1}{n}\right)$ eine Nullfolge ist (s.o.), existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$.

Es folgen einige wichtige Sätze über konvergente Folgen.

(15.5) SATZ: Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt genau einen Grenzwert a.

Bezeichnung: $\qquad a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Bew: a und b seien Grenzwerte von (a_n). Zz: $a = b$.
Annahme: $a \neq b \Longrightarrow \varepsilon := |a - b| > 0$
Es gibt $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$ und $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2$.
Sei $n_0 := \max(n_1, n_2)$. Dann gelten insbesondere für $n = n_0$ beide Ungleichungen:

$$|a_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ , \ |a_{n_0} - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mit $\quad a - b = (a - a_{n_0}) + (a_{n_0} - b)$ folgt

$\varepsilon = |a - b| = |(a - a_{n_0}) + (a_{n_0} - b)| \overset{\text{Dreiecksunglchg.}}{\leq} |a - a_{n_0}| + |a_{n_0} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Also $\varepsilon < \varepsilon$. Widerspruch! Folglich $a = b$. ∎

(15.6) DEF: Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, wenn es ein $K \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beispiele: $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt; denn $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt.

(15.7) SATZ: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Bew: Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Zu $\varepsilon := 1 \in \mathbb{R}_{>0}$ exstiert ein $n_0 = n_0(1) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$

$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ für alle $n \geq n_0$

Sei $K := \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|)$. Dann ist $K \in \mathbb{R}_{>0}$, und es gilt $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge (a_n) ist beschränkt. ∎

Anwendung: Die Folgen $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind divergent, da sie unbeschränkt sind.
Allgemein: Jede unbeschränkte Folge ist divergent.

(15.8) Grenzwertsätze für konvergente Folgen

(a_n) und (b_n) seien konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n =: b$. Dann gilt:

a) Die Summenfolge $(a_n + b_n)$ ist wieder konvergent, und es ist $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

b) Die Produktfolge $(a_n b_n)$ ist wieder konvergent, und es ist $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = a \cdot b$.

c) Ist $b \neq 0$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq m$. Die Quotientenfolge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq m}$ ist wieder konvergent, und es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.

Bew: von (15.8) (in der Vorlesung nur skizziert!)

a) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Zu zeigen: es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$.

$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$

Mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt auch $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}_{>0}$

Nach Voraussetzung gibt es $n_1(\varepsilon')$ und $n_2(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon'$ für alle $n \geq n_1(\varepsilon')$ und $|b_n - b| < n_2(\varepsilon')$ für alle $n \geq n_2(\varepsilon')$.

Für $n \geq n_0(\varepsilon) := \max(n_1(\varepsilon'), n_2(\varepsilon'))$ gelten dann beide Ungleichungen, d.h.
$|(a_n + b_n) - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon' + \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$.

b) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Z.z.: es existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \in \mathbb{N}$ mit $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. $a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b \Longrightarrow$
$|a_n b_n - ab| \leq |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| = |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|b|$

(a_n) ist nach (15.7) beschränkt, d.h. es existiert ein $K \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $L := \max(K, |b|)$ $\quad (\Longrightarrow \quad L \in \mathbb{R}_{>0})$.
Für genügend großes n gilt: $|b_n - b| < \varepsilon, |a_n - a| < \varepsilon$,
also $|a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|b| < K \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot |b| \overset{L:=\max(K,|b|)}{\leq} L \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot L = 2\varepsilon L$
Nach Voraussetzung gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit
$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2L}$ für alle $n \geq n_1$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2L}$ für alle $n \geq n_2$
Sei $n_0 := \max(n_1, n_2)$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|b| < \overbrace{L}^{|a_n| \leq K \leq L} \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot \overbrace{L}^{|b| \leq L} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ ,$$

d.h. die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \cdot b$.

c) $b \neq 0 \Longrightarrow |b| > 0$.
Sei $\varepsilon := \frac{|b|}{2} \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq m$.
$|b| - |b_n| \overset{(1.15g)}{\leq} |b - b_n| = |b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}$ für alle $n \geq m \Longrightarrow -|b_n| < -\frac{|b|}{2}$
$\Longrightarrow |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0 \Longrightarrow \underline{b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq m}$

Nach b) genügt es zu zeigen, daß mit (b_n) auch die Folge $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ konvergent ist und gegen $\frac{1}{b}$ konvergiert.
$b \neq 0 \Longrightarrow b_n \neq 0$ für alle $n \geq m \Longrightarrow \frac{1}{b_n}$ läßt sich für $n \geq m$ bilden!
Wir betrachten zunächst den Fall $\underline{b_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}}$:
zz: Zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$.
$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n|\,|b|}\,|b - b_n|$
Wie oben folgt $|b_n| > \frac{|b|}{2} > 0$ für alle $n \geq m$, d.h. $\frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{|b|} \quad \forall n \geq m$.

Für genügend großes n gilt daher: $\frac{1}{|b_n|\,|b|}\,|b - b_n| < \frac{2}{|b|\,|b|}\varepsilon$

Genauer: Zu $\varepsilon' := \frac{|b|^2}{2}\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| = |b - b_n| < \varepsilon'$ für alle $n \geq n_1$.
Sei $n_0 := \max(m, n_1)$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann
$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n|\,|b|} < \frac{2}{|b|}\frac{1}{|b|}\varepsilon' = \frac{2}{|b|^2}\left(\frac{|b|^2}{2}\varepsilon\right) = \varepsilon$

Damit konvergiert $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ gegen $\frac{1}{b}$.

Nach b) konvergiert die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$ gegen $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

Gilt $b_n \neq 0$ erst von einer Stelle m ab, so betrachten wir die Folge $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq m}$. Auch die Folge $(b_n)_{n \geq m}$ konvergiert gegen b. In den vorherigen Überlegungen ist nur sicherzustellen, daß alle Indizes n_1, n_0 auch $\geq m$ sind. ■

Beispiele: a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Summe aus der konstanten Folge (1) und der Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)$. Damit ist die Folge konvergent, und es gilt:

$$\lim \left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$$

b) $$\left(\frac{n-1}{2n+5}\right) = \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}}\right)$$

Im Zähler und Nenner stehen konvergente Folgen, im Nenner gilt $2 + \frac{5}{n} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim \left(2 + \frac{5}{n}\right) \overset{*)}{=} 2 \neq 0, \text{ also } \lim \frac{n-1}{2n+5} = \lim \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = \frac{\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\lim \left(2 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

*) $\left(2 + \frac{5}{n}\right)$ ist die Summe zweier konvergenter Folgen: $\left(\frac{1}{n}\right)$ Nullfolge, (5) konvergent $\overset{(15.8b)}{\Longrightarrow}$ $\left(5 \cdot \frac{1}{n}\right)$ ist konvergent mit Grenzwert $5 \cdot 0 = 0$.

<u>BEM:</u> Die Summenfolge $(a_n + b_n)$ (bzw. die Produktfolge $(a_n b_n)$) kann konvergent sein, ohne daß die Folgen (a_n) oder (b_n) konvergent sind.

<u>Frage:</u> Für welche $a \in \mathbb{C}$ ist die Folge $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent?

$a = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$	$\longrightarrow 0$
$a = -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \ldots$	$\longrightarrow 0$
$a = 1$	$1, 1, 1, 1, 1, \ldots$	$\longrightarrow 1$
$a = -1$	$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$	divergent
$a = i$	$i, -1, -i, 1, i, \ldots$	divergent
$a = 2$	$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$	unbeschränkt
$a = -2$	$-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$	unbeschränkt

Um diese Frage exakt beantworten zu können, benötigen wir folgende Ungleichung.

(15.9) Bernoullische Ungleichung:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a \in \mathbb{R}, a \geq -1 \text{ gilt: } (1+a)^n \geq 1 + na$$

Bew: (Induktion nach n) $n = 0$ $\surd$

$n \longrightarrow n+1$: $\quad 1 + a \geq 0$

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \overset{(IV)}{\geq} (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + \overbrace{na^2}^{\geq 0} \geq 1 + (n+1)a \qquad \blacksquare$$

(15.10) SATZ: Sei $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a^n) = 0$ für $|a| < 1$

b) (a^n) ist unbeschränkt (und damit divergent) für $|a| > 1$.

c) $|a| = 1 :\quad (a_n)$ konvergent $\iff$ $a = 1$.

(15.11) SATZ: Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen z_n mit $z_n = a_n + ib_n \quad (a_n, b_n \in \mathbb{R})$. Dann gilt:

a) (z_n) ist genau dann konvergent, wenn die beiden reellen Folgen (a_n) und (b_n) konvergent sind.

b) Konvergiert (z_n) gegen w, (a_n) gegen a und (b_n) gegen b, so folgt $w = a + ib$.
d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + i \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Dieser Satz ermöglicht es, Fragen nach der Konvergenz von Folgen mit komplexen Gliedern auf die von Folgen mit reellen Gliedern zurückzuführten. Wie wir im folgenden sehen werden, gibt es für Folgen mit reellen Gliedern noch weitere Kriterien, bei denen insbesondere die Anordnung der reellen Zahlen eine Rolle spielt. Diese Anordnung ist nach (14.11) für komplexe Zahlen nicht gegeben. Das Problem bei der Anwendung der Definition (15.2) besteht darin, daß erst einmal der Grenzwert der Folge bekannt sein muß . Diesen zu finden, ist häufig sehr schwierig, und man versucht daher, Kriterien für die Konvergenz herzuleiten, die es ermöglichen, aus internen Eigenschaften der Folge auf die Konvergenz zu schließen.

Folgen reeller Zahlen

(15.12) SATZ: Einschließungssatz

$(a_n), (b_n), (c_n)$ seien Folgen **reeller** Zahlen mit $a_n \leq b_n \leq c_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$. Konvergieren dann die Folgen (a_n) und (c_n) gegen denselben Grenzwert a, so ist auch die Folge (b_n) konvergent und hat ebenfalls den Grenzwert a.

Beispiel: Ist die Folge $\left(\dfrac{1}{2^n+1}\right)$ konvergent?

Es gilt $0 \leq \dfrac{1}{2^n+1} \leq \dfrac{1}{n}$, so daß die Folge $\left(\dfrac{1}{2^n+1}\right)$ von den beiden Nullfolgen (0) und $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ eingeschlossen wird. Dann ist auch die mittlere Folge konvergent, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n+1} = 0$.

(15.13) DEF: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge.

a) $t \in \mathbb{R}$ heißt **obere Schranke von** M, wenn gilt: $x \leq t \quad \forall x \in M$
Besitzt M eine obere Schranke, so heißt M **nach oben beschränkt**.

b) Eine obere Schranke $s \in \mathbb{R}$ von M heißt **Supremum von** M, wenn s die kleinste obere Schranke von M ist, d.h. $\forall t \in \mathbb{R}, t$ obere Schranke von $M \Longrightarrow s \leq t$

Analog: **untere Schranke von** M, **nach unten beschränkt**, **Infimum von** M = größte untere Schranke von M.

Beispiele: a) Sei $M := \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist 0 das Infimum und 1 das Supremum von M.

b) Sei $M :=]1,2[= \{x | x \in \mathbb{R}, 1 < x < 2\} \subseteq \mathbb{R}$ (offenes Intervall). Dann ist 1 das Infimum und 2 das Supremum von M.

(15.14) Vollständigkeitsaxiom für $(\mathbb{R}, \leq)$ Es gilt:

a) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.
b) Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

BEM: Man kann b) aus a) folgern.

Beispiele: a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Summe aus der konstanten Folge (1) und der Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)$. Damit ist die Folge konvergent, und es gilt:
$\lim \left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$

b) $\left(\frac{n-1}{2n+5}\right) = \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}}\right)$

Im Zähler und Nenner stehen konvergente Folgen, im Nenner gilt $2 + \frac{5}{n} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim \left(2 + \frac{5}{n}\right) \stackrel{*)}{=} 2 \neq 0$, also $\lim \frac{n-1}{2n+5} = \lim \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = \frac{\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\lim \left(2 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{1}{2}$

$*)$ $\left(2 + \frac{5}{n}\right)$ ist die Summe zweier konvergenter Folgen: $\left(\frac{1}{n}\right)$ Nullfolge, (5) konvergent $\stackrel{(15.8b)}{\Longrightarrow}$ $\left(5 \cdot \frac{1}{n}\right)$ ist konvergent mit Grenzwert $5 \cdot 0 = 0$.

(15.15) DEF: Sei (a_n) eine Folge **reeller** Zahlen.

a) (a_n) heißt **nach oben** (bzw. **unten**) **beschränkt** wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq K$ (bzw. $a_n \geq K$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) (a_n) heißt **monoton wachsend** (bzw. **fallend**), wenn gilt $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n \geq a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) (a_n) heißt **streng monoton wachsend** (bzw. **fallend**), wenn gilt $a_n < a_{n+1}$ (bzw. $a_n > a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beispiele:

a) (n) ist nach unten, nicht nach oben beschränkt und streng monoton wachsend.

b) $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ist streng monoton fallend, nach unten und nach oben beschränkt.

c) (a_n) beschränkt $\Longleftrightarrow$ (a_n) nach unten und nach oben beschränkt.

(15.16) SATZ: **a)** Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge (a_n) **reeller** Zahlen ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

b) Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge (b_n) **reeller** Zahlen ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \inf\{b_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Bew: $M := \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ ist eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Nach (15.14) existiert $s = \sup(M) \in \mathbb{R}$. Beh: $s = \lim(a_n)$
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $s - \varepsilon < a_{n_0}$. Sonst würde $s - \varepsilon \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ gelten, d.h. $s - \varepsilon$ ist obere Schranke von M mit $s - \varepsilon < s$. Widerspruch zu $s = \sup M$.
Also $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s$.
$\forall n \geq n_0$ gilt $a_n \geq a_{n_0}$, da (a_n) monoton wachsend ist.
$\Longrightarrow s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s < s + \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0$
$\Longrightarrow \ |a_n - s| < \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0$. Damit ist die Behauptung bewiesen.
Analog behandelt man den 2. Fall. Hierbei gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \inf\{b_n | n \in \mathbb{N}\}$. ■

Beispiele: **a)** $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ist monoton fallend, nach unten beschränkt $0 = \inf\left\{\dfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, also $\lim\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

b) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt mit $\sup\left\{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} = 1$, also $\lim\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$

Wir behandeln im folgenden einige Beispiele ausführlicher.

(15.17) SATZ: (**Die Eulersche Zahl** e) Sei $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge (a_n) konvergent. Ihr Grenzwert wird mit e (Eulersche Zahl) bezeichnet.

(Leonhard **Euler**, 1707–1783)

Bew: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(= a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

1) (a_n) ist monoton wachsend: $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{-1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (15.9)

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n} \quad \Big| \cdot \frac{n^n}{(n-1)^n}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n = \frac{(n+1)^n(n-1)^n}{n^{2n}} \frac{n^n}{(n-1)^n} \geq \frac{n-1}{n} \frac{n^n}{(n-1)^n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1}$$

d.h. $a_n \geq a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

2) (b_n) ist monoton fallend (ähnlicher Beweis)
3) $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. (a_n) und (b_n) sind beschränkt.
4) Nach (15.16) sind (a_n) und (b_n) konvergent. Seien $a := \lim(a_n) = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, $b := \lim(b_n) = \inf\{b_n | n \in \mathbb{N}\} \Longrightarrow a_n \leq a \leq b \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Aufg. 29a).

5) $b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a_n\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{a_n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\left(\frac{a_n}{n}\right)$ ist eine Nullfolge, da (a_n) konvergent ist und somit nach (15.8 b)

$$\lim\left(\frac{a_n}{n}\right) = \lim(a_n) \cdot \overbrace{\lim\left(\frac{1}{n}\right)}^{=0} = 0 \Longrightarrow 0 = \lim(b_n - a_n) \overset{(15.8a)}{=} \lim(b_n) - \lim(a_n) = b - a$$

$\Longrightarrow \underline{a = b =: e}$

6) $a_n \leq e \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (nach 4) und 5)). ■

Einige numerische Werte:

n	a_n	b_n
1	2	4
10	2.5937424601000000000	2.8531167061100000000
100	2.7048138294215260933	2.7318619677157413542
1000	2.7169239322358924574	2.7196408561681283498
10 000	<u>2.718</u>1459268252248640	<u>2.718</u>4177414179073865

Ein genauerer Wert ist $e = 2.7182818284590452354$. Wir stellen hier langsame Konvergenz fest. Später lernen wir eine bessere Berechnungsmöglichkeit mit Hilfe einer Reihe kennen.

(15.18) SATZ: (**Quadratwurzel**) Sei $c > 0$ eine reelle Zahl. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch :

$$a_1 \in \mathbb{R}_{>0} \text{ beliebig }, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Dann konvergiert die Folge (a_n) gegen $\sqrt{c} > 0$

Bew: 1) $a_n > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ (Beweis durch Induktion nach n)

2) $a_n^2 \geq c \ \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$a_n^2 - c = \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + \frac{c}{a_{n-1}}\right)^2 - c = \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + 2c + \frac{c^2}{a_{n-1}^2} - 4c\right) = \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \frac{c}{a_{n-1}}\right)^2 \geq 0$$

3) (a_n) ist monoton fallend (d.h. $a_n \geq a_{n+1} \ \ \forall n \geq 2$)

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}\frac{c}{a_n} = \frac{1}{2a_n}\overbrace{(a_n^2 - c)}^{\geq 0 \text{ nach } 2)} \geq 0$$

Da (a_n) nach 3) monoton fallend und nach 1) nach unten beschränkt ist, ist (a_n) konvergent (15.16). Sei $a := \lim(a_n) = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$

4) Sei $b_n := \dfrac{c}{a_n}$

Dann gilt $b_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ nach 1) und $b_n^2 \leq c \ \ \forall n \geq 2$.

$$a_n^2 \geq c \geq 0 \text{ nach 2)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{2} \ \ | \cdot c^2 \quad \Longrightarrow \quad b_n^2 = \frac{c^2}{a_n^2} \leq \frac{c^2}{c} = c$$

5) $b_n \leq b_{n+1} \ \ \forall n \geq 2$, d.h. (b_n) ist monoton wachsend.

$$a_n \geq a_{n+1} > 0 \text{ nach 3)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_{n+1}} \ \ | \cdot c \quad \Longrightarrow \quad b_n = \frac{c}{a_n} \leq \frac{c}{a_{n+1}} = b_{n+1}$$

6) $b_n \leq a_n \ \ \forall n \geq 2$

Sonst $b_m > a_m$ für ein $m \geq 2 \Longrightarrow b_m^2 > a_m^2 \geq c$ nach 2). Widerspruch zu 4).

Insgesamt ergibt sich:

$0 < b_2 \overset{6)}{\leq} \inf\{a_n | n \geq 2\} = a \leq a_2$ Also $a \neq 0$.

Insbesondere ist auch die Folge $\left(\dfrac{c}{a_n}\right)$ konvergent mit Grenzwert $\dfrac{c}{a}$.

Aus $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{c}{a_n}\right)$ folgt mit den Grenzwertsätzen aus (15.8)

$$a = \lim(a_{n+1}) = \lim \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim(a_n) + \lim\left(\frac{c}{a_n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Longrightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2}a = \frac{c}{2a} \Longrightarrow \underline{a^2 = c}$$

d.h. der Grenzwert a der Folge (a_n) ist eine Zahl, deren Quadrat gleich c ist.

Das Polynom $x^2 - c \in \mathbb{R}[x]$ hat höchstens 2 Nullstellen. Da mit a auch $-a$ Nullstelle ist, ist a also die eindeutig bestimmte positive Nullstelle von $x^2 - c$, d.h. $a = \sqrt{c}$.

Zur Fehlerabschätzung benötigt man noch :

7) $\dfrac{c}{a_n} \leq a \leq a_n \ \ \forall n \geq 2$

Annahme: $\dfrac{c}{a_m} > a \Longrightarrow b_m^2 = \dfrac{c^2}{a_m^2} > a^2 = c$ Widerspruch zu 4)

$a = \inf\{a_n | n \geq 2\} \Longrightarrow a \leq a_n \ \ \forall n \geq 2$ ■

Numerisches Beispiel: $c = 3 \qquad a_1 := 1$

n	a_n	$\dfrac{3}{a_n}$
1	2	1.5
2	1.7500000000000000000	1.7142857142857142857
3	1.7321428571428571429	1.7319587628865979381
4	1.7320508100147275405	1.7320508051230270500
5	1.7320508075688772953	1.7320508075688772918

Wir stellen schnelle Konvergenz fest. Nach 5 Schritten ist der Wert schon auf 17 Nachkommastellen exakt!

(15.19) BEM: **a)** Mit diesem Ergebnis (15.18) ist überhaupt erst die Existenz von Quadratwurzeln aus Zahlen ≥ 0 in $\mathbb{R}$ gesichert.

b) Mit ähnlichen Methoden kann man auch die Existenz von k-ten Wurzeln nachweisen. Sei $c \in \mathbb{R}, c > 0$. Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 \in \mathbb{R}_{>0} \text{ beliebig, } a_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)\,a_n + \frac{c}{a_n^{k-1}}\right] \quad (k \geq 2 \text{ fest})$$

Dann konvergiert die Folge (a_n) gegen die eindeutig bestimmte reelle Zahl $a > 0$ mit $a^k = c$, d.h. $a = \sqrt[k]{c}$.

(15.20) SATZ: **a)** $\forall a \in \mathbb{R}_{>0}: \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1 \qquad$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$

Bew: **a)** 1. Fall: $a = 1$ klar

2. Fall: $a > 1 \Longrightarrow \sqrt[n]{a} > 1 \Longrightarrow b := \sqrt[n]{a} - 1 > 0$.

Es ist also $\sqrt[n]{a} = b + 1 \Longrightarrow a = (b+1)^n \geq 1 + bn$ (8.9) $\Longrightarrow b \leq \dfrac{a-1}{n}$ mit $a - 1 > 0$

$\Longrightarrow 0 < \overbrace{\sqrt[n]{a} - 1}^{=b} \leq \dfrac{a-1}{n}$ ist eine Nullfolge

$\Longrightarrow (\sqrt[n]{a} - 1)$ ist eine Nullfolge $\Longleftrightarrow \sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$

Folglich ist die Folge $(\sqrt[n]{a})$ konvergent mit 1 als Grenzwert.

3. Fall: $0 < a < 1$ Sei $a_n := \sqrt[n]{a}$. Dann gilt $0 < a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Die Folge (a_n) ist monoton wachsend, also konvergent mit $0 < a = a_1 \leq \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

Sei $b = \dfrac{1}{a} \Longrightarrow b > 1 \Longrightarrow \sqrt[n]{b} \longrightarrow 1$ (2. Fall)

$$1 = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{b}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right) \overset{\lim \sqrt[n]{a} \neq 0, (15.8c)}{=} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

b) Sei $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$. $\; a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$

$$\Longrightarrow n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \overbrace{\binom{n}{k}}^{\geq 0} \overbrace{a_n^k}^{\geq 0} \overset{k=0,2}{\geq} 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

$$\Longrightarrow n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Longrightarrow 1 \geq \frac{n}{2} a_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow a_n^2 \leq \frac{2}{n} \Longrightarrow 0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\left(\frac{2}{n}\right)$ Nullfolge $\Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$ Nullfolge. Dann ist auch (a_n) eine Nullfolge mit $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Longrightarrow$ $(\sqrt[n]{n}) \longrightarrow 1$. ■

Einführung der Symbole $+\infty, \; -\infty$ Wir wollen die **Symbole** $+\infty$ und $-\infty$ einführen, die anschaulich an ein größtes bzw. kleinstes Element in $\mathbb{R}$ erinnern sollen, obwohl es **keine** reellen Zahlen sind. Damit lassen sich viele Aussagen, die vom Verhalten für sehr große bzw. kleine reelle Zahlen handeln, einfacher und anschaulicher formulieren. Im Zusammenhang mit Intervallen definieren wir:

$$
\begin{aligned}
]\,a, +\infty[\; &:= \; \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\} \subseteq \mathbb{R} \quad (a \in \mathbb{R}) \\
]-\infty, b\,] \; &:= \; \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq b\} \subseteq \mathbb{R} \quad (b \in \mathbb{R}) \\
]-\infty, +\infty[\; &:= \; \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Bei divergenten Folgen können wir ein unterschiedliches Verhalten feststellen:

(n)	$1, 2, 3, 4, \ldots$	$\longrightarrow +\infty$
(-2^n)	$-2, -4, -8, -16, \ldots$	$\longrightarrow -\infty$
$((-1)^n\, n)$	$-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$	auch unbeschränkt
$((-1)^n)$	$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$	beschränkt

⚠ $+\infty$ und $-\infty$ sind **Symbole** und **keine** reellen Zahlen. Insbesondere sind keine Rechenoperationen mit diesen Symbolen erlaubt. Ausdrücke wie $+\infty - (+\infty)$ oder $\frac{+\infty}{+\infty}$ sind sinnlos!

<u>**(15.21) DEF:**</u> Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt **bestimmt divergent gegen** $+\infty$ **(bzw.** $-\infty$**)**, wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $m = m(K) \in \mathbb{N}$ gibt mit: $a_n > K$(bzw. $a_n < K$) $\forall n \geq m$
Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \; \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$
Man spricht in diesen Fällen auch von **uneigentlicher Konvergenz**.

Die Folge (a^n) ist für $a \in \mathbb{R}, a > 1$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ (oder uneigentlich konvergent gegen $+\infty$) und für $a \in \mathbb{R}, a < -1$ divergent.

<u>**(15.22) SATZ:**</u> Die Folge (a_n) sei bestimmt divergent gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0 \;\; \forall n \geq n_0$, und die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0}$ ist eine Nullfolge.

<u>**Bew:**</u> $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = +\infty$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig $\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \;\; \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$
Für $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = -\infty$ betrachte man die Folge $(-a_n)$. ■

(15.23) SATZ: Sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right) = +\infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right) = -\infty$).

Bew: Sei $a_n > 0$. Sei $K > 0$. Zu $\varepsilon := \frac{1}{K} > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n = |a_n| < \varepsilon = \frac{1}{K} \quad \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{1}{a_n} > K \quad \forall n \geq n_0$. Folglich gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right) = +\infty$.
Analog $a_n < 0$. ■

(15.24) DEF: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine echt monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}, \ldots)$$

eine **Teilfolge** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Beispiele:
a) $n_k = 2k$, $\left(\frac{1}{n_k}\right) = \left(\frac{1}{2k}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ ist eine Teilfolge von $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$
b) $n_k = 2^k$, $(2^k)_{k\in\mathbb{N}} = (2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ ist eine Teilfolge von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$
c) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
$(1, 1, 1, \ldots)$ ist Teilfolge mit $n_k = 2k$,
$(-1, -1, -1, \ldots)$ ist Teilfoge mit $n_k = 2k - 1$, d.h. eine divergente Folge kann eine konvergente Teilfolge enthalten (dies liegt an der Beschränktheit!).

(15.25) SATZ: Ist die Folge (a_n) konvergent gegen a, so ist auch jede Teilfolge von (a_n) konvergent mit a als Grenzwert.

Bew: Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n). Zu $\varepsilon > 0$ existiert $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$. Nun gilt $k \leq n_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Ist $k \geq n_0(\varepsilon)$, so ist auch $n_k \geq n_0(\varepsilon)$, so daß folgt $|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \forall k \geq n_0(\varepsilon)$. Also $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k}) = a$. ■

Es gilt der folgende Satz von Bolzano-Weierstraß, den wir hier nicht beweisen wollen:

(15.26) SATZ: (Bolzano–Weierstraß)
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen enthält eine konvergente Teilfolge.

Bernhard **Bolzano** , 1781–1848

Karl Theodor Wilhelm **Weierstraß**, 1815–1897

Abschließend wollen wir noch ein weiteres **Konvergenzkriterium** für **beliebige** Folgen herleiten:

Sei (z_n) eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n) = z$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig $\Longrightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \dfrac{\varepsilon}{2}\ \ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig mit $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$.
$\Longrightarrow |z_m - z_n| = |(z_m - z) + (z - z_n)| \leq |z_m - z| + |z_n - z| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, d.h. der Abstand zwischen den Folgengliedern kann beliebig klein gemacht werden, wenn man nur die Folgenindizes genügend groß wählt.

(15.27) DEF: Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt eine **Cauchy-Folge**, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|z_m - z_n| < \varepsilon \ \ \forall m, n \geq n_0$$

(Augustin Louis **Cauchy**, 1789–1859)

Dies ist eine Eigenschaft einer Folge, die nur die Folgenglieder betrifft. Ein Grenzwert taucht hierbei nicht mehr auf.

(15.28) BEM: **a)** Jede Cauchy–Folge ist beschränkt (Beweis analog wie zu (15.7))

b) Sei $z_n = a_n + ib_n \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$. Genau dann ist die Folge (z_n) eine Cauchy–Folge, wenn die beiden reellen Folgen (a_n) und (b_n) Cauchy–Folgen sind.

Bew: Es gilt immer $|a_m - a_n| \leq |z_m - z_n|$, $|b_m - b_n| \leq |z_m - z_n|$ und $|z_m - z_n| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n|$, woraus sich die Aussage ergibt (s. Bew. von (15.11)).

(15.29) SATZ: **Konvergenzkriterium von Cauchy**

Für eine Folge (z_n) komplexer Zahlen sind folgende Aussagen äquivalent:

a) (z_n) ist konvergent

b) (z_n) ist eine Cauchy-Folge.

Bew: a)$\Longrightarrow$ b) s.o.

b)$\Longrightarrow$ a) Skizze: Sei $z_n = a_n + ib_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Die Folge (z_n) ist als Cauchy-Folge beschränkt (15.28a), dasselbe gilt dann auch für die beiden reellen Folgen (a_n) und (b_n). Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß (15.26) enthalten beide Folgen konvergente Teilfolgen, die dann einen Grenzwert a bzw. b besitzen. Es läßt sich dann zeigen: enthält eine Cauchy–Folge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent mit demselben Grenzwert. Also konvergiert die Folge (a_n) gegen a und (b_n) gegen b. Nach Satz (15.11) ist schließlich die Folge (z_n) konvergent mit $a + ib$ als Grenzwert. ■

(15.30) BEISPIEL: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 := 1,\ a_2 := 4,$
$a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad (n \geq 3)$. Die ersten Glieder der Folge sind also : $1, 4, 2.5, 3.25, 2.875$
Man sieht,daß diese Folge nicht monoton ist, wohl aber beschränkt.
$|a_2 - a_1| = 3, \quad |a_3 - a_2| = \frac{3}{2}, \quad |a_4 - a_3| = \frac{3}{4}, \quad |a_5 - a_4| = \frac{3}{8}$
Die Vermutung $|a_n - a_{n-1}| = 12 \cdot \frac{1}{2^n}$ läßt sich leicht durch vollständige Induktion nachweisen:
(IA): $\underline{n = 2:} \quad |a_2 - a_1| = 4 - 1 = 3 = \frac{12}{4} = 12 \cdot \frac{1}{2^2}$
(IV): Für ein beliebiges (aber festes) $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt $|a_n - a_{n-1}| = 12 \cdot \frac{1}{2^n}$
(IS): $|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{1}{2}(a_{n-1} + a_n) - a_n\right| = \left|-\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n\right| = \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}| \overset{(IV)}{=} 12 \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}$
$= 12 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ gilt:

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&= 12\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{12}{2^n}\left(\frac{1}{2^{m-n}} + \frac{1}{2^{m-n-1}} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right) \\
&\overset{\star)}{=} \frac{12}{2^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{24}{2^n} \underbrace{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}\right)}_{\leq 1} \\
&\leq \frac{24}{2^n}
\end{aligned}$$

$\star)$ endliche geometrische Reihe (s. (6.5b)).

Da $\left(\frac{24}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| \leq \frac{24}{2^n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$. Folglich $|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$, d.h. (a_n) ist eine Cauchy-Folge und damit konvergent.