Kap. III: Analysis

§14. Die komplexen Zahlen

(14.1) BEM: Ist $a \in \mathbb{R}$ eine negative reelle Zahl ($a < 0$), so besitzt die Gleichung $x^2 = a$ **keine** Lösung in $\mathbb{R}$. Insbesondere ist die Gleichung $x^2 = -1$ in $\mathbb{R}$ **nicht** lösbar. Wir werden im folgenden $\mathbb{R}$ zu dem Bereich der komplexen Zahlen erweitern, in dem diese Gleichungen Lösungen besitzen.

(14.2) SATZ: Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \}$ ist bzgl. der Rechenoperationen

$$(a,b) \oplus (a',b') := (a+a', b+b') \qquad \text{(Addition)}$$

$$(a,b) \odot (a',b') := (aa'-bb', ab'+a'b) \qquad \text{(Multiplikation)}$$

ein Körper. Dieser Körper heißt **Körper der komplexen Zahlen** und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Bew: $\mathbf{A}_3$) $(0,0)$ ist das Nullelement $\quad$ $\mathbf{A}_4$) $-(a,b) = (-a,-b)$

$\mathbf{M}_3$) $(1,0)$ ist das Einelement

$\mathbf{M}_4$) Sei $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beliebig mit $(a,b) \neq (0,0)$ $(\iff a^2+b^2 \neq 0)$. Dann gilt

$$(a,b) \odot \left(\frac{a}{a^2+b^2} \, , \, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = \left(a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} \, , \, a \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2} \right) =$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \, , \, 0 \right) = (1,0).$$ □

In $\mathbb{C}$ gibt es das Element $i := (0,1) \in \mathbb{C}$. Dieses Element heißt **imaginäre Einheit**. Hierfür gilt

$$i^2 = (0,1)^2 = (0,1) \odot (0,1) = (-1,0) .$$

Für ein beliebiges $(a,b) \in \mathbb{C}$ folgt dann wegen $(b,0) \odot (0,1) = (0,b)$

$$(\star) \quad (a,b) = (a,0) \oplus (0,b) = (a,0) \oplus [(b,0) \odot (0,1)]$$

Wir vereinfachen jetzt wieder die Bezeichnungsweise, indem wir für $\oplus$ das gewohnte $+$ schreiben und $\cdot$ für $\odot$. In $\mathbb{C}$ finden wir die reellen Zahlen wieder als Paare der Form $(a,0)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Mit diesen Paaren rechnet man "genauso" wie mit den reellen Zahlen:

$(a,0) + (b,0) = (a+b,0)$ und $(a,0) \cdot (b,0) = (ab,0)$.

Wir können daher das Paar $(a,0)$ mit a identifizieren. Auf diese Weise läßt sich $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen:

$$\mathbb{R} \longleftrightarrow \{ (a,0) \mid a \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{C}$$

Mit dieser Bezeichnungsweise vereinfacht sich $(\star)$ zu

$$(a,b) = (a,0) \oplus [(b,0) \odot (0,1)] = a + b\,i .$$

Insbesondere ist $i^2 = (-1,0)$, also $\boxed{i^2 = -1}$. Zusammenfassend erhalten wir das folgende Ergebnis:

(14.3) SATZ: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ läßt sich in der Form $z = a + bi$ mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen. Diese Form heißt **arithmetische Darstellung** von z. Dabei ist $i \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $i^2 = -1$.

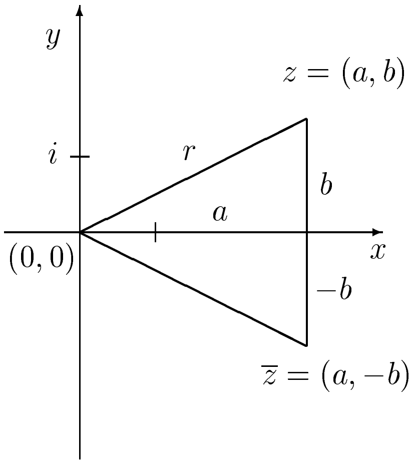
Die Rechenoperationen für komplexe Zahlen in arithmetischer Darstellung lassen sich nun folgendermaßen schreiben:

$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')\,i \qquad (a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')\,i$

Im Falle $z = a + bi \neq 0$ gilt $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\,i$.

Beispiele: $(2 + 3i) + (1 - i) = 3 + 2i$, $(2 + 3i)(1 - i) = 5 + i$, $\dfrac{1}{1 + i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Ursprünglich hatten wir die komplexen Zahlen als Elemente aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert, geometrisch gesehen also als Punkte der Ebene, die man daher auch die **Gauß'sche Zahlenebene** nennt.



Man nennt die x–Achse auch die **reelle Achse** und die y-Achse die **imaginäre Achse**.
Ist $z = a + bi$, so gibt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ den Abstand des Punktes z vom Nullpunkt an (Satz von Pythagoras). r heißt der **Betrag** der komplexen Zahl z.
Die Zahl $\overline{z} = a - bi$ entsteht aus z durch Spiegelung an der reellen Achse. Man nennt $\overline{z}$ die zu z **konjugiert komplexe** Zahl.

(14.4) DEF: $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ sei eine komplexe Zahl in arithmetischer Darstellung.

a) $a =: \mathrm{Re}(z)$ heißt der **Realteil** von z und $b =: \mathrm{Im}(z)$ der **Imaginärteil** von z .

b) $|\, z \,| := \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt der **Betrag** von z .

c) $\overline{z} := a - bi$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

Beispiele: $z = 3 + 4i$: $\overline{z} = 3 - 4i$, $\mathrm{Re}(z) = 3 = \mathrm{Re}(\overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = 4$, $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -4$,
$|\, z \,| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

BEM: **a)** Real– und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind immer **reelle** Zahlen.

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 + b^2 \geq 0$, so daß stets eine Quadratwurzel aus $a^2 + b^2$ existiert. Bei der Definition des Betrages setzen wir verabredungsgemäß voraus, daß wir die **positive** Quadratwurzel meinen, so daß der Betrag eindeutig definiert ist.

b) Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt: $w = z \iff \mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(z)$

(14.5) SATZ: Für komplexe Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $\overline{(\overline{z})} = z$ **b)** $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$ **c)** $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$.

Bew: **a)** Klar

b) Seien $w = a + bi$, $z = c + di$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann hat $w + z$ die arithmetische Darstellung $w + z = (a + c) + (b + d)i$, da $a + c, b + d \in \mathbb{R}$. Also $\overline{w + z} = (a + c) - (b + d)i$. Damit folgt $\overline{w} + \overline{z} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{w + z}$.

c) Analog zu b).

(14.6) SATZ: Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt: **a)** $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ **b)** $|z| = 0 \iff z = 0$

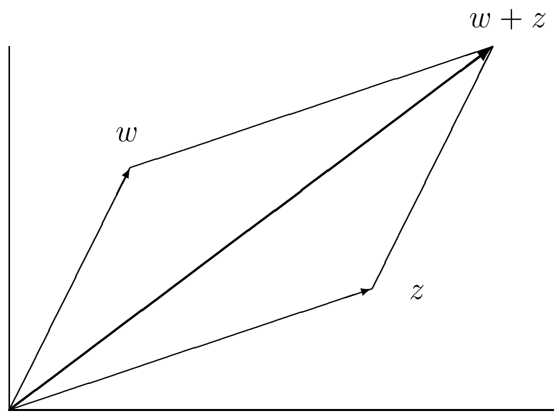
c) $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$ **d)** $|w + z| \leq |w| + |z|$ (**Dreiecksungleichung**) .

Bew: **a)** $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi \implies z \cdot \overline{z} = (a \cdot a - b \cdot (-b)) + (a \cdot (-b) + b \cdot a)i = a^2 + b^2 \implies |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$

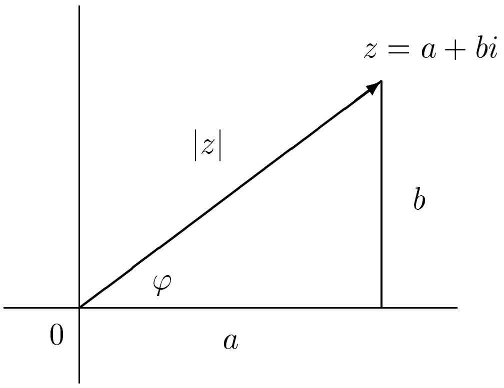
b) $|z| = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0$ und $b = 0 \iff z = 0$.

c) $|w \cdot z|^2 \overset{a)}{=} (w \cdot z) \cdot \overline{(w \cdot z)} \overset{(7.4c)}{=} (wz)(\overline{w} \cdot \overline{z}) = (w\overline{w})(z\overline{z}) = |w|^2 \cdot |z|^2$.
Zieht man auf beiden Seiten die (positive) Quadratwurzel, so folgt mit a) die Behauptung.

d) Wir veranschaulichen uns die Aussage an dem folgenden Bild:



In einem Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten immer größer–gleich der Länge der dritten Seite, so daß die Beh. $|w + z| \leq |w| + |z|$ folgt. Diese Überlegung begründet auch den Namen **Dreiecksungleichung**.



Die komplexe Zahl $z = a + bi$ ist eindeutig bestimmt durch die beiden folgenden geometrischen Größen:
1) den **Abstand** $|z|$ zum Nullpunkt
2) das **Argument** $\varphi =: \arg(z)$, das ist der Winkel, den die positive $x-$Achse mit dem Vektor $\vec{0z}$ im mathematisch positiven Sinn (also entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn) bildet.

Aus dem obigen rechtwinkligen Dreieck ergibt sich: $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{|z|}$ und $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{|z|}$, so daß man schreiben kann:

$$\underline{z} = a + bi \;=\; |z| \cdot \cos(\varphi) + |z| \cdot \sin(\varphi) \cdot i \;=\; \underline{|z| \cdot [\,\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\,]}$$

Dies ist die sog. **Polarkoordinatendarstellung** einer komplexen Zahl, die sich für das Multiplizieren und das Potenzieren von komplexen Zahlen besonders gut eignet. Dabei messen wir einen Winkel im **Bogenmaß** . Dem Winkel $360°$ entspricht das Bogenmaß 2π (Umfang des Einheitskreises), dem Winkel $90°$ das Bogenmaß $\dfrac{\pi}{2}$. Verlangen wir $0 \leq \varphi < 2\pi$, so ist das Argument von z eindeutig bestimmt, ansonsten können sich die Argumente zweier Polarkoordinatendarstellungen einundderselben komplexen Zahl um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden (die Funktionen sin und cos sind periodisch mit der Periode 2π).

<u>(14.7) SATZ:</u> a) Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl:

Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ läßt sich in der Form

$$z \;=\; |z| \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]$$

darstellen. Dabei sind das Argument φ von z und der Betrag $|z|$ reelle Zahlen ≥ 0 .

b) Sind $z \;=\; |z| \cdot [\,\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\,]$ und $w \;=\; |w| \cdot [\,\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi)\,]$ zwei komplexe Zahlen in Polarkoordinatenform, so gilt für deren Produkt:

$$w \cdot z \;=\; |w| \cdot |z| \cdot [\cos(\psi + \varphi) + i \cdot \sin(\psi + \varphi)]$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $z^n \;=\; |z|^n \cdot [\,\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\,]$ (**Formel von Moivre**)

<u>Bew:</u> a) S.o. **c)** Induktion nach n.

b) $w \cdot z \;=\; |w|\,|z|\,[\,\underbrace{(\cos(\psi)\cos(\varphi) - \sin(\psi)\sin(\varphi))}_{=\cos(\psi+\varphi)} + i\,\underbrace{(\cos(\psi)\sin(\varphi) + \sin(\psi)\cos(\varphi))}_{=\sin(\psi+\varphi)}]$

Beim Beweis haben wir die Additionstheoreme für sin und cos benutzt, die wir als bekannt voraussetzen. Das Ergebnis können wir auch so formulieren: $|wz| = |w||z|$ und $\arg(wz) = \arg(w) + \arg(z)$, d.h. bei der Bildung des Produktes zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich deren Beträge und addieren sich deren Argumente.

BEM: Zwei komplexe Zahlen w und z sind genau dann gleich, wenn ihre Beträge übereinstimmen und wenn sich ihre Argumente um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden.

(14.8) SATZ: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z = |z| \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] \neq 0$ eine komplexe Zahl. Dann gibt es genau n paarweise verschiedene komplexe Zahlen w_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ mit $w_k^n = z$, d.h. w_k ist eine n–te Wurzel aus z. w_k ist durch die folgende Formel gegeben:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Bew: Es sei $w = |w| \cdot [\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi)]$ eine n–te Wurzel aus z, d.h. es gelte $w^n = z$. Mit der Formel von Moivre ergibt sich dann:

$$w^n = |w|^n \cdot [\cos(n\psi) + i \sin(n\psi)] = |z| \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = z$$

Hieraus folgt, daß die Beträge gleich sein müssen ($|w|^n = |z| \implies |w| = \sqrt[n]{|z|}$. Hier ist wieder die (eindeutig bestimmte) reelle positive n-te Wurzel aus $|z|$ gemeint, die wegen $|z| \geq 0$ immer existiert). Außerdem können sich die Argumente nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π (d.h. $360°$) unterscheiden. Daher gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$n\psi = \varphi + 2k\pi \implies \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

Für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ erhält man n paarweise verschiedene Werte für ψ , die zu den im Satz angegebenen Formeln führen. Andere Werte für k liefern immer komplexe Zahlen, die schon unter den Zahlen $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ vorkommen, da sin und cos periodisch mit der Periode 2π sind. Also gilt $w \in \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$. Umgekehrt gilt $w_k^n = z$ $(\forall\, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, was man sofort mit der Formel von Moivre nachprüfen kann. Damit gibt es also im Bereich der komplexen Zahlen genau n paarweise verschiedene n–te Wurzeln aus z.

(14.9) BEISPIEL: $n = 4$: Wir wollen die 4–ten Wurzeln aus $z = 1 + i$ berechnen. Dazu müssen wir zunächst einmal die Polarkoordinatendartsellung von z bestimmen. Der zugehörige Punkt ist $(1, 1)$, das Argument φ von z ist also $\frac{\pi}{4}$ (dies entspricht dem Winkel $45°$), der Betrag von z ist $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Nach (14.8) sind dann die vier 4–ten Wurzeln w_k aus z gegeben durch

$$w_k = \sqrt[4]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{4}\right) \right] \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

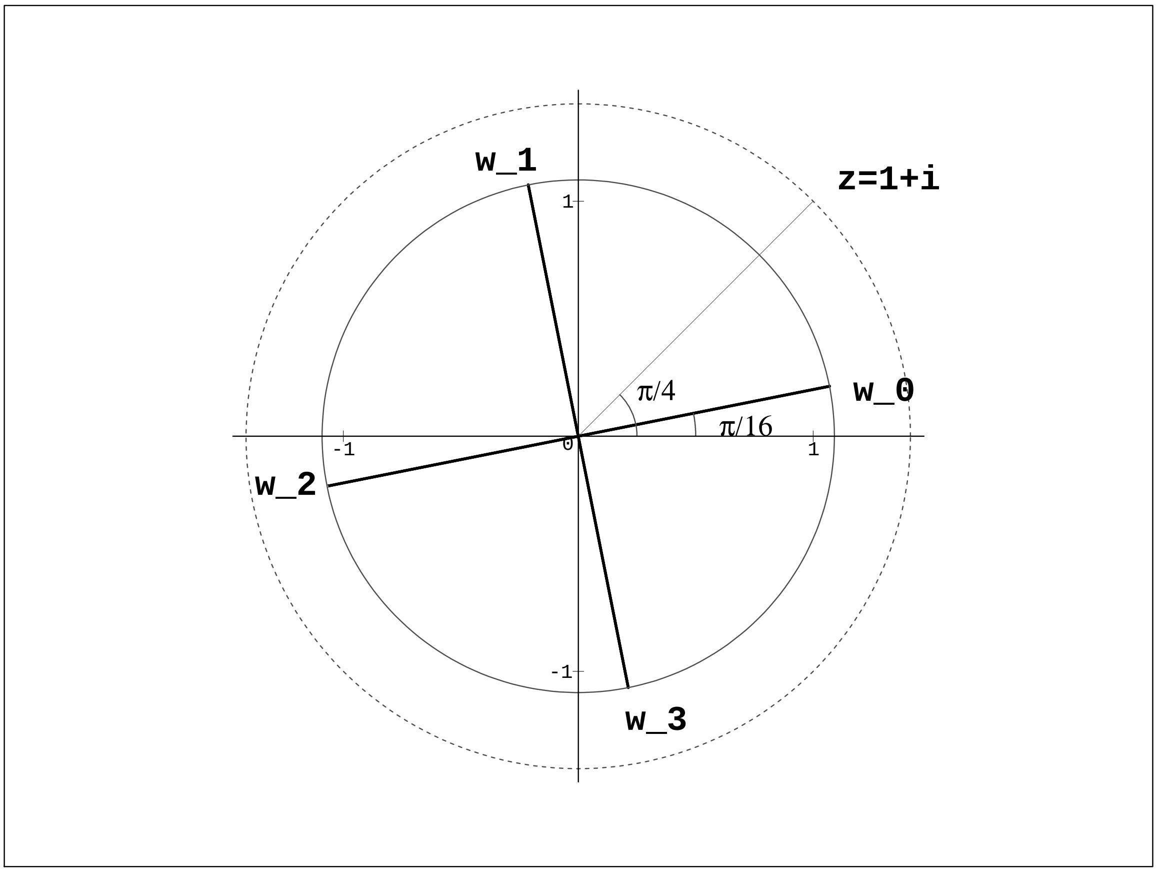
Damit erhalten wir die 4 Werte $w_0 = \sqrt[8]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \right]$

$$w_1 = \sqrt[8]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right) \right] = \sqrt[8]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{16}\right) \right]$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{16} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16} + \pi\right) \right] = \sqrt[8]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{17\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{16}\right) \right]$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right) \right] = \sqrt[8]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{25\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{25\pi}{16}\right) \right]$$

Anschaulich erhalten wir die 4–ten Wurzeln w_k aus z folgendermaßen: der Betrag von w_k ist die 4-te Wurzel aus dem Betrag von z, und das Argument von w_k erhält man dadurch, daß man $\dfrac{2k\pi}{4}$ zu $\dfrac{\arg(z)}{4} = \dfrac{\pi}{16}$ addiert $(k = 0, 1, 2, 3)$.



Die 4–ten Wurzeln aus $z = 1 + i$

(14.10) SATZ: Fundamentalsatz der Algebra (Gauß , 1799)

Jede polynomiale Gleichung der Form

$$(\star) \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

mit Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ $(n \geq 1, a_n \neq 0)$ besitzt mindestens eine Lösung in $\mathbb{C}$.

Diesen Satz können wir hier nicht beweisen. Er enthält eine reine Existenzaussage. Ein ganz anderes und viel schwierigeres Problem besteht darin, Rechenverfahren zur Bestimmung von Lösungen zu finden. Die Gleichungen $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ oder $ix^5 + 3x^3 + (1+i)x^2 - i = 0$ besitzen also jeweils mindestens eine komplexe Lösung. Wir werden später sehen, daß eine polynomiale Gleichung $(\star)$ "vom Grade n" höchstens n paarweise verschiedene Lösungen besitzt. Insbesondere hat die Gleichung $x^n - z = 0$ $(\Longleftrightarrow \; x^n = z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mindestens eine und höchstens n Lösungen in $\mathbb{C}$ in Einklang mit (14.8).

(14.11) BEM: Mit komplexen Zahlen, die wir in der Form $a + bi$ darstellen können, läßt sich unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ genauso rechnen wie mit den reellen Zahlen, darüberhinaus läßt sich aus jeder komplexen Zahl eine n–te Wurzel ziehen. Wir können allerdings nicht die $\leq$–Beziehung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ fortsetzen. Genauer: Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine lineare Ordnungsrelation, die mit der Addition und der Multiplikation auf $\mathbb{C}$ verträglich ist. Wäre nämlich $\preceq$ eine solche Ordnungsrelation, so würde wie in (1.6) folgen, daß $z^2 \succeq 0$ für jede komplexe Zahl z gelten müßte, insbesondere also auch $1 = 1^2 \succeq 0$. Andererseits ist aber $-1 = i^2 \succeq 0 \mid +1 \implies$ $0 \succeq 1$. Wegen der Antisymmetrie folgt hieraus $1 = 0$. Widerspruch!