§13. Determinanten

Problem: Wie können wir feststellen, ob eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ invertierbar ist?

Wir wissen: A invertierbar $\Longrightarrow$ es gibt $B \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $A \cdot B = E_n$ und $B \cdot A = E_n$. Wegen (12.20) reicht eine dieser beiden Bedingungen aus. Bekannt ist:

(13.1) SATZ: Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ sind äquivalent:

a) A ist invertierbar **b)** $\mathrm{rg}(A) = n$

c) Die Spalten von A sind linear unabhängig

d) Die Spalten von A bilden ein EZS von K^n

e) Die Spalten von A bilden eine Basis von K^n

f) Die Zeilen von A sind linear unabhängig

g) Die Zeilen von A bilden ein EZS von $\mathrm{M}_{n,1}(K)$

h) Die Zeilen von A bilden eine Basis von $\mathrm{M}_{n,1}(K)$.

(13.2) SATZ: Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(K)$ gilt:

$$A \text{ invertierbar} \Longrightarrow ad - bc \neq 0$$

Diese Größe $ad - bc$ nennen wir die **Determinante** der (2×2)–Matrix A. An ihr können wir ablesen, ob A invertierbar ist oder nicht. Wir wollen im folgenden allgemein die Determinante einer quadratischen Matrix definieren. Dies wird rekursiv geschehen. Wir definieren:

$\underline{n = 1}$ $A = (a_{11}) \in \mathrm{M}_1(K)$: $\det(A) := a_{11} \in K$

$\underline{n = 2}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(K)$: $\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}\det(a_{22}) - a_{12}\det(a_{21})$

$\underline{n = 3}$ $A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \in \mathrm{M}_3(K)$

$$\begin{aligned}\det(A) :&\overset{(*)}{=} a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

$(*)$ Hier wird $\det(A)$ nach der ersten Zeile "entwickelt": wir streichen die erste Zeile und die erste Spalte von A. Es bleibt die (2×2)–Matrix $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ übrig, von der wir die Determinante bilden (s. Fall $\underline{n=2}$) und mit a_{11} multiplizieren. Dann streichen wir die erste Zeile und die zweite Spalte von A. Übrig bleibt die (2×2)–Matrix $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, deren Determinante wir mit $-a_{12}$ multiplizieren. Dann streichen wir die erste Zeile und die dritte Spalte von A, es bleibt die (2×2)–Matrix $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ übrig, deren Determinante mit a_{13} multipliziert wird. Schließlich werden diese drei Größen aufsummiert. Bezeichnen wir die (2×2)–Matrix, die aus A durch Streichen der i–ten Zeile und der k–ten Spalte entsteht, mit A'_{ik} , so gilt

$$\det(A) \;=\; a_{11}\det(A'_{11}) - a_{12}\det(A'_{12}) + a_{13}\det(A'_{13})$$

oder

$$|A| \;=\; a_{11}|A'_{11}| - a_{12}|A'_{12}| + a_{13}|A'_{13}|$$

Beispiel: **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

$$|A| = 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} - 2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=2} + 3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}_{=1} \;=\; 1\cdot 1 - 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 1-4+3 \;=\; 0$$

Wir wollen noch den Rang von A bestimmen ($\rightarrow$ steht für die Ausführung einer elementaren Zeilenumformung) :

$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d.h. $\mathrm{rg}(A) = 2 < 3$. Also ist A nicht invertierbar, und es gilt $\det(A) = 0$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

$$|B| = 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} - (-1)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=-2} + 0\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=-1} \;=\; 1\cdot 1 - (-1)\cdot(-2) + 0\cdot(-1) = 1-2+0 = -1$$

Wir bestimmen auch hier wieder den Rang von B ($\rightarrow$ steht für die Ausführung einer elementaren Zeilenumformung) :

$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ d.h. $\mathrm{rg}(B) = 3$ Also ist B invertierbar, und es gilt $\det(B) \neq 0$.

(13.3) BEM: Die oben beschriebene Methode zur Berechnung der Determinante einer (3×3)–Matrix ist auch unter dem Namen **Regel von Sarrus** bekannt. Man kann folgendermaßen vorgehen:

Es werden die ersten beiden Spalten von A noch einmal rechts von A geschrieben:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\
& \ddots & & \diagup\!\!\!\cdot\!\cdot & & \diagup\!\!\!\cdot\!\cdot & & \diagup & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\
& \diagup & & \diagup\!\!\!\cdot\!\cdot & & \diagup\!\!\!\cdot\!\cdot & & \ddots & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32}
\end{array}$$

Es werden jeweils die drei Elemente, die mit einer gestrichelten Linie verbunden sind, miteinander multipliziert und die Produkte dann aufsummiert, davon werden dann die Produkte von jeweils 3 Elementen, die mit einer durchgezogenen Linie verbunden sind, subtrahiert. Das Ergebnis ist die Determinante von A.

Achtung: Die Regel von Sarrus ist nur für (3×3)–Matrizen gültig.

Wir kommen nun zu der allgemeinen Definition der Determinante:

(13.4) DEF: Es sei K ein beliebiger Körper und $n\in\mathbb{N}$. Die **Determinante** $\det(A)$ einer $(n\times n)$–Matrix $A=(a_{ik})\in \mathrm{M}_n(K)$ ist rekursiv definiert durch:

$\underline{n=1}$ $\det(A):=a_{11}$ $\quad$ $\underline{n>1}$ $(*)$ $\det(A):=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}\det(A'_{1k})$

Dabei ist $A'_{1k}\in \mathrm{M}_{n-1}(K)$ die Matrix, die aus A durch Streichen der ersten Zeile und der k–ten Spalte entsteht. Man nennt $(*)$ auch die **Entwicklung von** $\det(A)$ **nach der ersten Zeile**.

Beispiel: a) Für $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_2(K)$ besagt die Definition:

$$\det(A)=a_{11}\cdot\det(A'_{11})\ -\ a_{12}\cdot\det(A'_{12})$$

in Einklang mit unserer Definition vom Anfang dieses Paragraphen.

b) Sei $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\det(A) = 1\cdot\det(A'_{11})-2\cdot\det(A'_{12})+3\cdot\det(A'_{13})-4\cdot\det(A'_{14}) =$$

$$=1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}}_{=1} -2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}}_{=-1} +3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}_{=-2} -4\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}_{=3}$$

$$=1\cdot 1-2\cdot(-1)+3\cdot(-2)-4\cdot 3=-15$$

(13.5) SATZ: (Grundeigenschaften der Determinante) Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Dann gilt:

a) $\det(A)$ ist K–linear in den Spalten von A .

b) Sind zwei Spalten von A gleich, so folgt $\det(A) = 0$.

c) $\det(E_n) = 1$.

(13.6) FOLG: Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Dann gilt:

a) $\det(A)$ ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte ein skalares Vielfaches einer anderen Spalte addiert.

b) $\det(A)$ ändert das Vorzeichen, wenn man zwei Spalten vertauscht.

c) Ist eine Spalte von A die Nullspalte, so folgt $\det(A) = 0$.

d) Sind die Spalten von A linear abhängig, so folgt $\det(A) = 0$.

BEM: Damit gilt: Spalten von A linear abhängig $\Longrightarrow$ $\det(A) = 0$ oder äquivalent dazu: $\det(A) \neq 0$ $\Longrightarrow$ Spalten von A sind linear unabhängig $\overset{(13.1)}{\Longleftrightarrow}$ A ist invertierbar. Wir werden später sehen, daß auch die Umkehrung gilt.

Für die Berechnung einer Determinante ist es wichtig, daß man nicht nur nach der ersten Zeile, sondern nach einer beliebigen Zeile entwickeln kann:

(13.7) SATZ: Laplace'scher Entwicklungssatz

(Entwicklung nach der i–ten Zeile)

Sei $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ $(n \geq 2)$. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt dann:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A'_{ik}) \ .$$

Jeder Summand ist mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+k}$ versehen. Diese Vorzeichen sind "schachbrettartig" verteilt:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wir wollen $\det(A)$ nach allen drei Zeilen entwickeln:

$\underline{i=1}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{1+k} a_{1k} \det(A'_{1k}) \\ &= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{=4} + (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=2} = 0 - 8 - 2 = -10 \end{aligned}$$

$\underline{i=2}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{2+k} a_{2k} \det(A'_{2k}) \\ &= (-2) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=5} + \underbrace{0 \cdot |*|}_{=0} - \underbrace{0 \cdot |*|}_{=0} = (-2) \cdot 5 + 0 + 0 = -10 \end{aligned}$$

Hier ist es nicht nötig, die Determinanten auszurechnen, die mit dem Faktor 0 multipliziert werden.

$\underline{i=3}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{3+k} a_{3k} \det(A'_{3k}) \\ &= \underbrace{0 \cdot |*|}_{=0} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{=2} + 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{=-4} = 0 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) = -10 \ . \end{aligned}$$

Wir sehen, daß in allen drei Fällen derselbe Wert herauskommt. Um den Rechenaufwand gering zu halten, entwickelt man nach einer Zeile, in der möglichst viele Nullen stehen. In dem obigen Beispiel ist es am günstigsten, nach der zweiten Zeile zu entwickeln.

Ohne Beweis geben wir den folgenden Satz an:

(13.8) Determinantenproduktsatz

Für Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt $\boxed{\det(A \cdot B) \ = \ \det(A) \cdot \det(B)}$

Man beachte, daß eine entsprechende Aussage für die Summe zweier Matrizen nicht gilt:

Achtung: I.a. gilt $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Gegenbeispiel: Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ gilt

$\det(A) + \det(B) = 0 + 0 = 0$ und $\det(A + B) = \det(E_2) = 1$.

(13.9) FOLG: Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt:

a) A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

b) Ist A invertierbar, so folgt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

(13.10) BEM: a) Es gilt $\det({}^tA) = \det(A)$. Da die Zeilen von ${}^tA$ gerade die Spalten von A sind, hat $\det(A)$ auch bzgl. der Spalten ganz entsprechende Eigenschaften wie bzgl. der Zeilen.

b) Insbesondere kann man eine Determinante auch nach einer Spalte entwickeln:

Laplace'scher Entwicklungssatz (Entwicklung nach der k–ten Spalte)

Sei $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ $(n \geq 2)$. Für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt dann:

$$\det(A) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A'_{ik}) \;.$$

c) Ist A eine quadratische Matrix mit $\det(A) \neq 0$, so ist ja ein LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar. Die sog. **Cramersche Regel** liefert ein Verfahren, wie man mit Hilfe von Determinanten diese Lösung berechnen kann:

Seien $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $b \in K^n$. Die Matrix A habe die Spalten $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dann ist die einzige Lösung $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ des LGS's $A \cdot x = b$ gegeben durch

$$z_i \;=\; \frac{\det(v_1 \ldots v_{i-1}\; b\; v_{i+1} \ldots v_n)}{\det(A)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

d) Es gibt eine explizite Formel für Determinanten, die sog. **Leibniz'sche Determinantenformel**. Diese besteht für eine $(n \times n)$–Matrix aus $n!$ Summanden, wobei jeder Summand ein Produkt aus n Elementen der Matrix ist. Im Falle $n = 3$ hatten wir diese Formel schon aufgestellt. Allgemein:

Für eine Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt

$$\det(A) \;=\; \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$$