§12. Lineare Abbildungen

Wir wollen in diesem Paragraphen die Grundlagen legen, um die folgenden **Probleme** lösen zu können:

a) Die Lösungsmenge L eines homogenen LGS's $Ax = o$ $(A \in \mathrm{M}_{m,n}(K))$ ist ein Unterraum von K^n. Wie läßt sich die Dimension von L bestimmen? Wie läßt sich eine Basis von L finden?

b) Für eine invertierbare Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ muß es eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(K)$ geben mit $A \cdot B = E_n$ **und** $B \cdot A = E_n$. Reicht **eine** der beiden Bedingungen schon aus?

(12.1) DEF: V und W seien Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt K–**linear**, wenn gilt:

L$_1$) $\forall\, v, v' \in V \,:\, f(v + v') = f(v) + f(v')$

L$_2$) $\forall\, a \in K\ \forall\, v \in V \,:\, f(av) = af(v)$.

(12.2) BEISPIELE: **a)** Für $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ ist die Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^m$, $v \longmapsto A \cdot v$, K–linear.

b) Es bezeichne $\mathcal{A}$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ und $\mathcal{D}$ die Menge aller differenzierbaren Abbildungenvon $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Beide Mengen sind $\mathbb{R}$–Vektorräume ($\mathcal{D}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{A}$). Dann ist die Abbildung $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$, $f \longmapsto f'$, die jeder Abbildung ihre Ableitung zuordnet, eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung.

(12.3) SATZ: (Eigenschaften von linearen Abbildungen)

Für eine K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ gilt:

a) $f(o_V) = o_W$ **b)** $\forall\, v \in V \,:\, f(-v) = -f(v)$

c) $\forall\, v, v' \in V \,:\, f(v - v') = f(v) - f(v')$

d) $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f(v_i) \quad (a_i \in K, v_i \in V)$

(12.4) SATZ: $f : V \longrightarrow W$ sei eine K–lineare Abbildung und $T := \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann gilt:

a) $f(\mathcal{L}_K(T)) = \mathcal{L}_K(f(T))$

b) T EZS von V und f **surjektiv** $\Longrightarrow$ $f(T)$ EZS von W

c) T linear unabhängig und f **injektiv** $\Longrightarrow$ $f(T)$ linear unabhängig

d) T Basis von V und f **bijektiv** $\Longrightarrow$ $f(T)$ Basis von W.

(12.5) DEF: Eine bijektive K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ zwischen zwei K–Vektorräumen heißt ein K–**Isomorphismus**.

(12.6) BEM: a) Gibt es einen Isomorphismus $f : V \longrightarrow W$, so nennt man die Vektorräume V und W **isomorph** und schreibt dafür $V \cong W$.

b) Isomorphismen erhalten die wesentliche Eigenschaften von Vektorräumen. Isomorphe Vektorräume können zwar unterschiedliche Elemente und Rechenoperationen haben, die "Rechenregeln" sind aber in beiden Vektorräumen diegleichen.

c) Für endlichdimensionale Vektorräume V und W gilt: $V \cong W \implies \dim_K(V) = \dim_K(W)$ (und auch die Umkehrung!)

d) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann ist die Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$, $v \longmapsto A \cdot v$ ein Isomorphismus. (Beweis als Übung)

(12.7) LEMMA: Ist $f : V \longrightarrow W$ eine K–lineare Abbildung, so gilt:

f injektiv $\iff$ $(\forall\, v \in V \;:\; f(v) = o_W \implies v = o_V)$.

(12.8) DEF: Für eine K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ wird definiert:

a) $\mathbf{Kern}(f) = \{\, v \mid v \in V, f(v) = o_W \,\} \subseteq V$

b) $\mathbf{Bild}(f) = \{\, f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$.

Beispiel: Die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

f ist eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung, und es gilt

$$\mathrm{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \right\} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\mathrm{Bild}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$$

(12.9) SATZ: Für eine K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ gilt:

a) $\mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ und $\mathrm{Bild}(f) \subseteq W$ sind jeweils Unterräume.

b) f injektiv $\iff$ $\mathrm{Kern}(f) = \{o_V\}$ (s. (12.7))

c) f surjektiv $\iff$ $\mathrm{Bild}(f) = W$.

(12.10) SATZ: (Rangsatz für lineare Abbildungen)

V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum und $f : V \longrightarrow W$ eine K–lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\dim_K(V) \;=\; \dim_K(\mathrm{Kern}(f)) + \dim_K(\mathrm{Bild}(f)).$$

(Die Dimension von $\mathrm{Bild}(f)$ wird auch als **Rang** der linearen Abbildung f bezeichnet, $\dim_K(\mathrm{Bild}(f)) =: \mathrm{rg}(f)$). $\dim_K(\mathrm{Bild}(f)) =: \mathrm{rg}(f)$).

Beispiel: Bei der obigen Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) = 4$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(f)) = 2$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(f)) = 2$. Folglich
$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) = 4 = 2 + 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(f)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(f))$.

Anwendungen auf lineare LGS'e

(12.11) SATZ: Die Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ habe die Spalten $v_1, \ldots, v_n \in K^m$. Das LGS $(\star)$ $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $b \in \mathcal{L}_K(v_1, \ldots, v_n)$ gilt.

(**Genauer:** Gilt $b = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$, so ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ eine Lösung von $(\star)$.)

(12.12) FOLG: Das LGS $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b)$ gilt.

(12.13) LEMMA: Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $f_A : K^n \longrightarrow K^m$ die durch A definierte lineare Abibldung. Dann gilt:

a) $\mathrm{Kern}(f_A) = \mathrm{Lös}(A, o_m)$ **b)** $\mathrm{Bild}(f_A) = S(A)$ (Spaltenraum von A).

(12.14) SATZ: Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine Matrix vom Range r. Dann hat der Lösungsraum $\mathbb{L} := \mathrm{Lös}(A, o_m)$ des homogenen LGS's $Ax = o_m$ die Dimension

$$\dim_K(\mathbb{L}) \;=\; n - r$$

(Anzahl der Unbekannten $-$ Rang der Koeffizientnematrix).

(12.15) Der Entzerrungsalgorithmus

Seien $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,5}(\mathbb{R})$ und $b := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

Wir wollen das LGS $Ax = b$ lösen. Mit dem Gauß–Algorithmus bringen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b) auf Treppenform:

$$\begin{array}{rrrrrr}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
\hline
\multicolumn{6}{c}{\downarrow \text{ Gauß–Algorithmus } \downarrow} \\
\hline
1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & b' \\
e_1 & e_2 & & e_3 & &
\end{array}$$

Wir stellen nun b' als Linearkombination der Spalten $v_1, \ldots, v_5$ von $T(A)$ dar:

$b' = 3e_1 + (-1)e_2 = 3v_1 + (-1)v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 + 0 \cdot v_5$. Nach (12.11) ist dann $w_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine (spezielle) Lösung von $T(A)x = b'$ und damit auch von $Ax = b$.

Nun stellen wir den ersten Spaltenvektor, der nicht zu einem charakteristischen Index gehört (hier: v_3), als eine Linearkombination der links davon stehenden Einheitsvektoren dar und machen daraus eine Linearkombination aller Spalten, die den Vektor o_4 ergibt:

$v_3 = (-2)e_1 + 1e_2 \quad \Longrightarrow \quad (-2)v_1 + 1v_2 + (-1)v_3 + 0v_4 + 0v_5 = o_4$

Nach (12.11) ist dann $w_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung des homogenen Systems $T(A)x = o_4$und damit auch von $Ax = o_4$. Mit den übrigen Spaltenvektoren von T(A), die nicht zu den charakteristischen Indizes gehören, verfahren wir analog.

$$v_5 = (-1)e_1 + 1e_3 \Longrightarrow (-1)v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 1v_4 + (-1)v_5 = o_4 \Longrightarrow w_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Lös}(A, o_4)$$

Diese beiden Lösungsvektoren w_1 und w_2 sind linear unabhängig. Da die Dimension des Lösungsraumes nach (12.14) gleich $5 - 3 = 2$ ist, bilden sie sogar eine Basis des Lösungsraumes des homogenen LGS's, d.h. $\text{Lös}(A, o_4) = \mathcal{L}_K(w_1, w_2)$. Nach (10.35) gilt daher

$$\text{Lös}(A,b) \;=\; \{w_0 + w \mid w \in \text{Lös}(A,o_4)\,\} \;=\; \{w_0 + rw_1 + sw_2 \mid r,s \in \mathbb{R}\} \;=$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r,s \in \mathbb{R} \right\}$$

Diese Lösungen lassen sich nun mit einem kleinen Trick leicht direkt **ablesen** . Dazu fügen wir Nullzeilen ein, bis links oben eine $(n \times n)$–Matrix entsteht, bei der die Einsen der charakteristischen Spalten in der Hauptdiagonale stehen:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
\textbf{neu} \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\
\hline
 & & & w_1 & & w_2 & w_0 \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow
\end{array}$$

Die Nullen in der Hauptdiagonale werden dann durch -1 ersetzt. Jetzt lassen sich die relevanten Größen direkt ablesen: w_0 ist eine (spezielle) Lösung von $Ax = b$, und w_1, w_2 sind Basisvektoren von $\text{Lös}(A, o_4)$. Nach (10.35) ist dann die Lösungsmenge von $Ax = b$ (in Übereinstimmung mit dem vorher gefundenen Ergebnis):

$$\text{Lös}(A,b) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r,s \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

(12.16) SATZ: Sei $f : K^n \longrightarrow K^m$ eine K–lineare Abbildung. Dann gibt es (genau) eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ mit $f(v) = A \cdot v \quad \forall\, v \in K^n$. A heißt **Darstellungsmatrix** von f und wird mit $\mathrm{M}(f)$ bezeichnet.

Fazit Jede lineare Abbildung $f : K^n \longrightarrow K^m$ ist eindeutig durch eine Matrix aus $\mathrm{M}_{m,n}(K)$ bestimmt, und umgekehrt definiert jede Matrix aus $\mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine lineare Abbildung $K^n \longrightarrow K^m$ (s. Beispiel (12.2a)). Lineare Abbildungen $K^n \longrightarrow K^m$ und Matrizen aus $\mathrm{M}_{m,n}(K)$ sind also "dasselbe".

(12.17) BEISPIELE: **a)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ y-z \end{pmatrix}$ ist eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung. Die Darstellungsmatrix von f ist die (2×3)–Matrix mit den Spalten

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ f(e_3) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\mathrm{M}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Es gilt:

$$f(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = M(f) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$ (Mache die **Probe!**). Allgemein:

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = M(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ y-z \end{pmatrix}$$

b) Die Darstellungsmatrix der identischen Abbildung $\mathrm{id}_{K^n} : K^n \longrightarrow K^n$, $v \longmapsto v$ ist $\mathrm{M}(\mathrm{id}_{K^n}) = E_n$ (Einheitsmatrix).

c) Für die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^m$ mit $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ (s. (12.2a)) gilt $\mathrm{M}(f_A) = A$.

(12.18) SATZ: $f : K^n \longrightarrow K^m$ und $g : K^m \longrightarrow K^p$ seien K–lineare Abbildungen. Dann gilt: $\mathrm{M}(g \circ f) = \mathrm{M}(g) \cdot \mathrm{M}(f)$.

(12.19) SATZ: Sei $f : K^n \longrightarrow K^m$ eine K–lineare Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ bijektiv} \iff \mathrm{M}(f) \text{ invertierbar.}$$

(12.20) FOLG: Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Gibt es dann eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $A \cdot B = E_n$ (**oder** $B \cdot A = E_n$), so ist A invertierbar.