§11. Vektorräume

(11.1) DEF: Sei K ein Körper und V eine Menge mit einer Addition $+ : V \times V \longrightarrow V$, $(v, w) \longmapsto v + w \in V$ und einer skalaren Multiplikation $\cdot_K : K \times V \longrightarrow V$, $(a, v) \longmapsto av \in V$. Dann heißt $(V, +, \cdot_K)$ ein K–**Vektorraum** (oder ein **Vektorraum über** K), wenn folgende Eigenschaften gelten:

a) Für die Addition:

A$_0$) $\forall v, w \in V : \quad v + w \in V$

A$_1$) $\forall u, v, w \in V : \quad u + (v + w) = (u + v) + w$

A$_2$) $\forall v, w \in V : \quad v + w = w + v$

A$_3$) $\exists\, o_V \in V \;\; \forall v \in V : \quad v + o_V = v$

A$_4$) $\forall v \in V \;\; \exists w \in V : \quad v + w = o_V$

b) Für die skalare Multiplikation:

SM$_0$) $\forall c \in K \; \forall v \in V : \quad cv \in V$

SM$_1$) $\forall c \in K \; \forall v, w \in V : \quad c(v + w) = cv + cw$

SM$_2$) $\forall c, d \in K \;\; \forall v \in V : \quad (c + d)v = cv + dv$

SM$_3$) $\forall c, d \in K \;\; \forall v \in V : \quad c(dv) = (cd)v$

SM$_4$) $\forall v \in V : \quad 1_K \cdot v = v$

BEZEICHNUNGEN: $(V, +, \cdot_K)$ sei ein K–Vektorraum.

Die Elemente aus V heißen **Vektoren**, die Elemente aus K **Skalare**.

Das Element o_V aus A$_3$) heißt **Nullvektor** von V. Er ist eindeutig bestimmt.

Das Element w in A$_4$) heißt der zu v **negative Vektor**. Er ist eindeutig bestimmt und wird mit $\underline{-v}$ bezeichnet.

Die **Differenz** zweier Vektoren ist definiert durch: $\underline{v - w} := v + (-w)$.

(11.2) BEISPIELE: **a)** Ist K ein Körper, so ist die Menge $\mathrm{M}_{m,n}(K)$ aller $(m \times n)$–Matrizen mit Elementen aus K nach (10.5) ein K–Vektorraum. Dabei sind m und n beliebige natürliche Zahlen. Also z.B.:

$\mathrm{M}_{4,5}(\mathbb{Q})$ ist ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum

$\mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum

$\mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_7)$ ist ein $\mathbb{Z}_7$–Vektorraum.

b) Spezialfall von a): Der K–Vektorraum $K^m := \mathrm{M}_{m,1}(K)$ aller Spalten aus m Elementen von K. Addition und Skalarmultiplikation sind komponentenweise definiert. Etwa:

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \text{ ist ein } \mathbb{R}\text{–Vektorraum}$$

$$\mathbb{Q}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{Q} \right\} \text{ ist ein } \mathbb{Q}\text{–Vektorraum}$$

$$\mathbb{Z}_2^4 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}_2 \right\} \text{ ist ein } \mathbb{Z}_2\text{–Vektorraum}$$

c) Jeder Körper K ist ein K–Vektorraum:

$\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, $\mathbb{Q}$ ist ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum, $\mathbb{Z}_{13}$ ist ein $\mathbb{Z}_{13}$–Vektorraum

d) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum

e) Die Menge $\mathcal{F}(K)$ aller unendlichen Folgen von Elementen aus K ist ein K–Vektorraum. Zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden "gliedweise" addiert, d.h.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(K)$ und $c \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(K)$.

f) Die Vektoren der Ebene (bzw. des Raumes) bilden einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(11.3) SATZ: K sei ein Körper. In einem K–Vektorraum V gelten die folgenden Rechenregeln:

a) $\forall\, v \in V : o_K \cdot v = o_V$

b) $\forall\, a \in K : a \cdot o_V = o_V$

c) $\forall\, a \in K\, \forall\, v \in V : a \cdot v = o_V \iff (a = 0_K \;\vee\; v = o_V)$

d) $\forall\, v \in V : (-1_K) \cdot v = -v$.

(11.4) DEF: K sei ein Körper und V ein K–Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein **Unter(vektor)raum** von V, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

U$_1$) $o_V \in U$

U$_2$) $\forall\, u, u' \in U : u + u' \in U$

U$_3$) $\forall\, a \in K\, \forall\, u \in U : a \cdot u \in U$.

(11.5) BEISPIELE: **a)** Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$. Dann ist die Lösungsmenge $\text{Lös}(A, o_m) \subseteq K^n$ des **homogenen** LGS's $Ax = o_m$ nach (10.37) ein Unterraum von K^n.

b) In jedem K–Vektorraum V sind die Teilmengen $\{o_V\}$ und V Unterräume von V. Der Unterraum, der nur aus dem Nullvektor besteht, heißt der **Nullraum**.

c) $U := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

d) Sei $v_0 \in V$ ein fester Vektor. Dann ist

$$U := \{ a \cdot v_0 \mid a \in K \} \subseteq V$$

ein Unterraum von V. U heißt der von v_0 **erzeugte Unterraum** von V.

e) Seien $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Dann ist $U := \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Ein Element aus U heißt eine **Linearkombination** von v_1 und v_2. U heißt auch der von der Teilmenge $\{v_1, v_2\}$ **erzeugte Unterraum** von $\mathbb{R}^3$.

(11.6) BEM: Ein Unterraum $U \subseteq V$ eines K–Vektorraumes V ist für sich selbst betrachtet wieder ein K–Vektorraum.

(11.7) SATZ: K sei ein Körper, V ein K–Vektorraum und $E := \{ v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine endliche nichtleere Teilmenge von V. Dann ist die Menge

$$\mathcal{L}_K(E) := \{ \, a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in K \, \} \subseteq V$$

ein Unterraum von V.

$\mathcal{L}_K(E)$ heißt der **von E erzeugte Unterraum von** V. Ein Element aus $\mathcal{L}_K(E)$ heißt eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Man schreibt auch $\mathcal{L}_K(E) = \mathcal{L}_K(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Außerdem definiert man $\mathcal{L}_K(\emptyset) := \{ o_V\}$.

(11.8) BEISPIELE: **a)** $E = \{v\} \subseteq V \implies \mathcal{L}_K(v) = \{av | a \in K\} =: Kv$.

b) $E = \{v_1, v_2\} \subseteq V \implies \mathcal{L}_K(v_1, v_2) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 | \, a_1, a_2 \in K\}$

c) Betrachtet man K als K–Vektorraum, so gilt $\mathcal{L}_K(1_K) = K$, also $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(1) = \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_2}(1_{\mathbb{Z}_2}) = \mathbb{Z}_2$.

d) Sei $E := \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ die Teilmenge, die aus den 3 Einheitsvektoren aus $\mathbb{R}^3$ besteht. Dann gilt $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) = \mathbb{R}^3$.

(11.9) DEF: K sei ein Körper und V ein K–Vektorraum. Eine (endliche) Teilmenge $E \subseteq V$ heißt ein **Erzeugendensystem** (abgekürzt: **EZS**) von V, wenn $\mathcal{L}_K(E) = V$ gilt.

(11.10) BEISPIELE: **a)** $\{e_1, e_2, e_3\}$ ist ein EZS von $\mathbb{R}^3$. Dies gilt auch für K^3.

b) Die Menge $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq K^n$ der Einheitsvektoren in K^n ist ein EZS von K^n.

c) $\{ 1_K\}$ ist ein EZS von K.

d) $\{ o_V\}$ und $\emptyset$ sind EZS'e des Nullraumes $\{ o_V\}$.

Bei einem EZS $E \subseteq V$ können unterschiedliche Fälle auftreten:

a) Jeder Vektor aus V läßt sich auf genau eine Art als Linearkombination der Vektoren aus E darstellen

b) Es gibt Vektoren, die sich auf verschiedene Arten als Linearkombination der Vektoren aus E darstellen lassen.

Ende WS 2000/01 — Fortsetzung im SS 2001

(11.11) SATZ: Sei V ein K–Vektorraum. Für Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n \in V$ gilt:
$\mathcal{L}_K(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n) = \mathcal{L}_K(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \iff v_n \in \mathcal{L}_K(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$

(11.12) DEF: Sei V ein K–Vektorraum. Eine endliche Teilmenge $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n\} \subseteq V$ heißt **linear abhängig (über K)**, wenn sich mindestens ein Vektor aus T als Linearkombination der übrigen Vektoren aus T darstellen läßt. Anderenfalls heißt T **linear unabhängig (über K)**. Es wird festgesetzt, daß die leere Menge $\emptyset$ linear unabhängig über K ist.

(11.13) SATZ: Kriterium für die lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit
Sei V ein K–Vektorraum und $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$:

a) T ist genau dann linear abhängig, wenn es Skalare $a_1, \ldots, a_n \in K$ gibt, die **nicht** alle 0 sind, so daß $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = o_V$ gilt.

b) T ist genau dann linear unabhängig, wenn für beliebige Skalare $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = o_V$ folgt, daß alle $a_1, \ldots, a_n$ Null sind.

(11.15) SATZ: Es sei $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq K^m$ eine Menge von n Spaltenvektoren aus K^m. Ferner sei A die $(m \times n)$–Matrix, deren Spalten die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind. Dann gilt:

a) T ist genau dann linear unabhängig, wenn das homogene LGS $Ax = o_m$ nur den Nullvektor als Lösung besitzt.

b) Ein Vektor $v \in K^m$ läßt sich genau dann als Linearkombination von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen, wenn das LGS $Ax = v$ lösbar ist.

c) T ist genau dann ein EZS von K^m, wenn das LGS $Ax = v$ für jeden Vektor $v \in K^m$ lösbar ist.

(11.16) FOLG: Sei $T := \{ v_1, \ldots, v_n \} \subseteq K^m$ eine Teilmenge aus n Vektoren. Dann gilt:

a) T linear unabhängig $\Longrightarrow n \leq m$

b) T EZS von K^m $\Longrightarrow n \geq m$.

(11.17) DEF: Sei V ein K–Vektorraum. Eine endliche Teilmenge $B \subseteq V$ heißt eine **Basis** von V, wenn gilt:

i) B ist linear unabhängig

ii) B ist ein EZS von V.

(11.19) SATZ: Sei V ein K–Vektorraum und $T := \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) T ist eine Basis von V

b) **Jeder** Vektor aus V läßt sich als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ mit **eindeutig bestimmten** Koeffizienten aus K darstellen.

(11.20) BEM: In dem K–Vektorraum K^m gilt nach (11.16):

a) Jede linear unabhängige Teilmenge von K^m hat höchstens m Elemente

b) Jedes EZS von K^m hat mindestens m Elemente

c) Jede Basis von K^m hat genau m Elemente

d) K^m besitzt eine Basis

e) Je zwei Basen von K^m besitzen gleichviel Elemente.

(11.21) SATZ: Ist $T = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ein EZS eines K–Vektorraumes $V \neq 0$, so gibt es eine Teilmenge $S \subseteq T$, die eine Basis von V ist

(kurz: jedes EZS enthält eine Basis).

(11.22) SATZ: Sei V ein K–Vektorraum mit einer Basis aus m Elementen. Dann gilt:

a) Jede linear unabhängige Teilmenge von V hat höchstens m Elemente

b) Jedes EZS von V hat mindestens m Elemente

c) Jede Basis von V hat genau m Elemente.

(11.23) DEF: Besitzt ein K–Vektorraum V eine Basis aus m Elementen, so heißt m die **Dimension** von V, in Zeichen: $m = \dim_K(V)$. Man nennt V dann auch einen m–**dimensionalen** Vektorraum.

(11.24) BEISPIELE: **a)** $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$ (Basis aus n Einheitsvektoren)

b) $\dim_K(K^n) = n$ (K ein beliebiger Körper)

c) $\dim_K(K) = 1$ ($\{1\}$ ist eine Basis von K)

d) $\dim_K(0) = 0$ ($\emptyset$ ist eine Basis).

(11.25) SATZ: Sei V ein n–dimensionaler K–Vektorraum und $T := \{v_1, \ldots, v_s\} \subseteq V$. Die Dimension des von T erzeugten Unterraumes $U = \mathcal{L}_K(T)$ ist dann gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren aus T. Insbesondere gilt $\dim_K(U) \leq n$.

(11.25) SATZ: Sei V ein n–dimensionaler K–Vektorraum und $T := \{v_1, \ldots, v_s\} \subseteq V$. Die Dimension des von T erzeugten Unterraumes $U = \mathcal{L}_K(T)$ ist dann gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren aus T. Insbesondere gilt $\dim_K(U) \leq n$.

(11.26) SATZ: U sei der von den Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n \in K^m$ erzeugte Unterraum von K^m und $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_n$. Ferner sei $r = \mathrm{rg}(A)$. Dann gilt:

a) $\dim_K(U) = r$

b) Bezeichnen $k_1, \ldots, k_r$ die charakteristischen Spaltenindizes der Treppenmatrix $T(A)$ von A, so ist $\{v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_r}\}$ eine Basis von U.

(11.27) BEISPIEL: Sei $U = \mathcal{L}_K(v_1, \ldots, v_6) \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren $v_1, \ldots, v_6 \in \mathbb{R}^4$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^4$, wobei die Vektoren $v_1, \ldots, v_6$ gerade die Spalten der nachfolgenden Matrix A sind. Es sollen die Dimension und eine Basis von U bestimmt werden.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2/9 \end{pmatrix}$$

$T(A)$ hat den Rang 4, also ist $\dim_{\mathbf{R}}(U) = 4$. Die charakteristischen Spaltenindizes sind $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 4, k_4 = 5$, also ist

$$\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$$

eine Basis von U.

Zum Abschluß der Linearen Algebra wollen wir noch folgende **Probleme** behandeln:

a) Der Rang einer Matrix ist durch die zugehörige Treppenmatrix definiert. Läßt sich der Rang auch direkt an der Matrix ablesen?

b) Die Lösungsmenge L eines homogenen LGS's $Ax = o \quad (A \in \mathrm{M}_{m,n}(K))$ ist ein Unterraum von K^n. Wie läßt sich die Dimension von L bestimmen? Wie läßt sich eine Basis von L finden?

c) Für eine invertierbare Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ muß es eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(K)$ geben mit $A \cdot B = E_n$ **und** $B \cdot A = E_n$. Reicht **eine** der beiden Bedingungen schon aus?

d) Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn ihr Rang gleich n ist. Dieser Rang wird über die Treppenmatrix berechnet. Gibt es noch eine andere Möglichkeit, dies festzustellen? (Stichwort: Determinanten)

(11.28) DEF: Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$.

a) Der **Spaltenrang** $\mathrm{rg}_s(A)$ von A ist die Dimension des von den Spalten von A erzeugten Unterraumes von $K^m = \mathrm{M}_{m,1}(K)$ (des Spaltenraumes $S(A)$ von A).

b) Der **Zeilenrang** $\mathrm{rg}_z(A)$ von A ist die Dimension des von den Zeilen von A erzeugten Unterraumes von $\mathrm{M}_{1,n}(K)$ (des Zeilenraumes $Z(A)$ von A).

(11.29) SATZ: Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ gilt $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}_s(A) = \mathrm{rg}_z(A)$.

Beweisidee: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}_s(A)$ folgt aus (11.26). Durch elementare Zeilenumformungen ändert sich nicht der Zeilenraum $Z(A)$. Daher gilt $\mathrm{rg}_z(A) = \dim_K(Z(A)) = \dim_K(Z(T(A))) = \mathrm{rg}_z(T(A)) = \mathrm{rg}(A)$.

(11.30) BEM: **a)** **(Basisergänzungssatz)** Ist V ein n–dimensionaler K–Vektorraum, so läßt sich jede linear unabhängige Teilmenge von V zu einer Basis von V ergänzen.

b) V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum. Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $\dim_K(U) = n = \dim_K(V)$, so folgt $U = V$.