Bitte beachten!

Füllen Sie bitte für jede Übung das beigefügte Deckblatt aus und heften Sie es an Ihre Aufgaben. Sie erleichtern uns damit unsere Listenführung und helfen mit, das Chaos, das wir am Ende des letzten Semesters mit den Punktelisten hatten, zu vermeiden.

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!

Sollte bei einer der ersten beiden Übungen das Deckblatt fehlen, gibt es nur die halbe Punktzahl, danach werden Übungen ohne ausgefülltes Deckblatt nicht mehr gewertet.

Mathematik für Informatiker II
Sommersemester 2001

Deckblatt zu Übung Nr.* ____

Name:* ______________________

Vorname:* ______________________

Matrikelnr.:*

Gruppe:*† ______________________

Bemerkung:*‡ ______________________

Erreichte Punkte:§

Aufgabe:						Summe	Korrektor
Punkte:							

*Bitte lesbar (in Druckschrift) ausfüllen!

†Bitte angeben: Tag, von-bis, Tutor; z. B. DI 09-11 Nelius

‡Hier z. B. Wechsel der Übungsgruppe angeben

§Wird vom Korrektor ausgefüllt

5. Übungsblatt

MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER II (SS 2001)

Abgabe: Freitag 25.5.2001 bis **11.00 Uhr !!!**

Abgabeort: s. Internet **Internet–Adresse** der Vorlesung:

http://math–www.uni–paderborn.de/~chris/index10.html

21. Aufgabe: Bestimme alle 3–ten Wurzeln aus der komplexen Zahl $8i$ und mache die Probe. Veranschauliche das Ergebnis zeichnerisch in der Gauß'schen Zahlenebene. Hinweis: Folgendes könnte nützlich sein: $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. (3)

22. Aufgabe: Sei $a_n := \dfrac{3}{5n^2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Beweise durch direkte Anwendung der Definition (15.2), daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Bestimme speziell für $\varepsilon = 10^{-5}$ eine Zahl $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $|a_n - 0| < \varepsilon \ \ \forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$.
Dieselbe Aufgabe für $\varepsilon = 10^{-10}$. (3)

23. Aufgabe: Es ei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a und c eine beliebige komplexe Zahl. Beweise auf Grundlage der Definition (15.2), daß die Folge $(c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ca konvergiert. (3)

24. Aufgabe: a) Bestimme mit Hilfe das Grenzwertsatzes (15.8) den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in den folgenden Fällen (dabei ist jeder einzelne Schritt zu begründen!):

i) $a_n = \dfrac{3n^3 + 2n^2 - 1}{4n^3 - n + 15}$ **ii)** $a_n = \dfrac{3n^2 - 4n + 2}{4n^3 + n^2 - 13}$

b) Bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{2}{n^2} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{n} + i\right)^2$ (5)

25. Aufgabe: Schnelle Multiplikation und Division in $\mathbb{C}$.
Hintergrund: *Multiplikation und Division komplexer Zahlen, die in der Form $z = x + iy$ gegeben sind $(x, y \in \mathbb{R})$, werden auf Multiplikationen und Divisionen reeller Zahlen zurückgeführt. (Natürlich werden auch reelle Additionen und Subtraktionen dabei verwendet. Diese sind aber so "billig", daß wir sie für diese Aufgabe nicht zählen!) Für eine gute Implementierung der Arithmetik in $\mathbf{C}$ ist es wichtig,* möglichst wenig *reelle Divisionen und Multiplikationen zu verwenden. Als "Preis" werden dann aber einige Zwischenergebnisse abspeichert und mehrfach verwendet.*
Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ komplexe Zahlen.
a) Zeige, daß Real- und Imaginärteil des Produktes $z_1 \cdot z_2$ mit zusammen (höchstens) *vier* Multiplikationen oder Divisionen in $\mathbb{R}$ berechnet werden können.

b) Zeige, daß Real- und Imaginärteil von $\frac{z_1}{z_2}$ mit zusammen (höchstens) *acht* Multiplikationen oder Divisionen in $\mathbb{R}$ berechnet werden können.

c) Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 können auch mit lediglich *drei* Multiplikationen oder Divisionen in $\mathbb{R}$ multipliziert werden. Gib dazu eine Rechenvorschrift an. Hinweis: Es ist hilfreich, die Gleichung $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - x_1x_2 - y_1y_2 = x_1y_2 + x_2y_1$ zu verwenden. (4)

d) (ohne Wertung:) Untersuche, ob sich mit Hilfe der Idee aus c) der Quotient $\frac{z_1}{z_2}$ mit nur *sieben* Multiplikationen oder Divisionen in $\mathbb{R}$ ausrechnen läßt. Wie? Kommt man sogar mit nur *sechs* Multiplikationen oder Divisionen aus? Ein Tip: Falls $y_2 \neq 0$ ist, kann man an geeigneter Stelle durch diese reelle Zahl teilen.

Deckblatt nicht vergessen!