Aufgabe 1

a) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

die Matrix, deren Spalten gerade die Vektoren aus T_1 sind. Nach (11.15 a) ist T_1 genau dann linear unabhängig, wenn das homogene LGS

$$Ax = 0_3$$

nur die triviale Lösung besitzt.

Dazu bestimmt man zunächst die Treppenform $T(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2II+III} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T(A)$$

An der Treppenmatrix ersieht man, dass $\mathrm{rg}(A) = 2$ ist. Daher hängt die Lösung des LGS von $3-2=1$ freien Parameter ab. Folglich besitzt $Ax = 0_3$ eine nichttriviale Lösung. Daher ist T_1 linear abhängig.

b) Es gelte

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei a und b Elemente aus $\mathbb{R}$ seien. Dann folgt

$$\begin{pmatrix} a-b \\ 2b \\ 3a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung $2b = 0$ folgt nun $b = 0$. Aus der ersten Gleichung folgt $a = b = 0$. Nach (11.13 b) ist T_2 somit linear unabhängig.

c) In $\mathbb{R}^3$ hat eine linear unabhängige Teilmenge höchstens 3 Elemente (siehe (11.16 a)). Daher kann T_3 nicht linear unabhänhgig sein,da $|T_3| = 4 > 3$ gilt. Folglich ist T_3 linear abhängig.

Aufgabe 2

a) Eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist insbesondere ein Erzeugendensystem und hat somit nach (11.16 b) mindestens 3 Elemente. Folglich ist S_1 keine Basis, da hier $|S| = 2$ gilt.

b) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

die Matrix, deren Spalten aus den Vektoren von S_2 besteht. Es wird wieder die Treppenmatrix $T(A)$ von A berechnet.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II:2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[3II+III]{I-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III:6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[II-2III]{I+III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T(A)$$

Dann ist $\mathrm{rg}(A) = 3$. Damit ist A invertierbar, und es exitiert für jedes $w \in \mathbb{R}^3$ genau eine Lösung von $Ax = w$. Diese ist $A^{-1}w$.

Nach (11.15 a) ist damit S_2 linear unabhängig und nach (11.15 c) ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$. Insgesamt ist also S_2 eine Basis.

Aufgabe 3

Von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kann man zur zugehörigen Treppenmatrix wie folgt gelangen:

$$\xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[II:2]{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T(A)$$

Dann folgt $\mathrm{rg}(A) = 2$, d.h. die Lösung von $Ax = 0_3$ hängt von $4 - 2 = 2$ freien Parametern ab.
Durch Rückwärtseinsetzen erhält man die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ -\frac{1}{2}r \\ r \\ s \end{pmatrix} \middle| \, r, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Setzt man nun speziell $r = 1, s = 0$ bzw. $r = 0, s = 1$ so erhält man die beiden Lösungsvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in L \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in L.$$

Behauptung: $S := \{v_1, v_2\}$ ist eine Basis von L. Zum Beweis wird gezeigt, dass S sowohl linear unahängig als auch ein Erzeugendensystem von L ist.
Beweis:

1.) Es sei $v \in L$. Dann gilt

$$v = \begin{pmatrix} s \\ -\frac{1}{2}r \\ r \\ s \end{pmatrix} = rv_1 + sv_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(S),$$

d.h. jeder Vektor $v \in L$ kann als Linearkombnation von v_1 und v_2 dargestellt werden. Also ist S ein Erzeugendensystem von L.

2.) Es gelte

$$a_1v_1 + a_2v_2 = o_4$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Es ist zu zeigen, dass $a_1 = a_2 = 0$ ist. Dazu rechnet man die Linearkombination aus und erhält

$$a_1v_1 + a_2v_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -\frac{1}{2}a_1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus liest man das gewünschte Ergebnis $a_1 = a_2 = 0$ ab. Es ist damit nachgewiesen, dass S linear unabhängig ist.

Daher ist S eine Basis von L.

Aufgabe 4

Die Matrix E_{ik} ist eine 3×3-Matrix, die an der Stelle (i,k) eine 1 und sonst lauter Nullen hat. Um nachzuweisen, dass die Menge

$$S := \{E_{ik} | 1 \leq i, k \leq 3\}$$

eine Basis ist, zeigt man erneut, dass diese Menge linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von $M_3(\mathbb{R})$ ist.

1.) Es sei $A \in M_3(\mathbb{R})$ beliebig mit $A = (a_{ik})$. Da die Matrix $a_{ik}E_{ik}$ genau an der Stelle (i,k) das Element a_{ik} und sonst lauter Nullen besitzt, gilt

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}E_{ik} = A,$$

d.h. $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(S)$, also ist S ein Erzeugendensystem von $M_3(\mathbb{R})$.

2.) Es gelte nun

$$\sum_{i,k=1}^{3} b_{ik}E_{ik} = 0 \in M_3(\mathbb{R})$$

mit $b_{ik} \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$(b_{ik}) = (0) \in M_3(\mathbb{R})$$
$$\Rightarrow b_{ik} = 0 \text{ für alle } i, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Damit ist S linear unabhängig.

Insgesamt ist also S eine Basis von $M_3(\mathbb{R})$. Diese Basis hat $|S| = 3 \cdot 3 = 9$ Elemente.

Aufgabe 5

Es sei $S := \{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\} =: T$.

a) Es sei S linear abhängig. Dann gibt es $a_1, \ldots, a_m \in K$, die nicht alle Null sind, mit

$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m = o_V.$$

Es sei nun $a_j \neq 0$ für ein $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann ist

$$a_1v_1 + \cdots + a_jv_j + \cdots + a_mv_m + \underbrace{0 \cdot v_{m+1}}_{= o_V} + \cdots + \underbrace{0 \cdot v_n}_{= o_V} = o_V$$

eine Linearkombination der Elemente von T, welche den Nullvektor ergibt, und in der nicht alle Koeffizienten Null sind (siehe a_j). Also ist T linear abhängig.

b) Es seien $b_1, \ldots, b_m \in K$ mit

$$b_1v_1 + \ldots + b_mv_m = \sum_{i=1}^{m} b_iv_i = o_V. \tag{1}$$

Es ist zu zeigen, dass $b_1 = \cdots = b_m = 0$.

Es folgt aus der Voraussetzung (1) sofort die Gleichung

$$b_1 + \cdots + b_mv_m + \underbrace{0 \cdot v_{m+1}}_{= o_V} + \cdots + \underbrace{0 \cdot v_n}_{= o_V} = o_V.$$

Dies ist eine Linearkombination der Elemente von T, die den Nullvektor ergibt. Da T linear unabhängig ist, ist jeder Koeffizient in dieser Linearkombination Null. Insbesondere folgt dann

$$b_1 = \ldots b_m = 0,$$

d.h. S ist linear abhängig.

Aufgabe 6

Bilde die Matrix $A \in M_{4,5}(\mathbb{R})$, die die Vektoren $v_1, \dots, v_5$ als Spalten hat, und bringe sie auf Treppenform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[II+IV]{II+III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[II-IV]{III-2II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt $\mathrm{rg}(A) = 3$, woraus wiederum nach (11.26 a) $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$ folgt. Die charakteristischen Spaltenindices sind **1**, **2** und **4**. Damit ist nach (11.24 b) die Menge $\{v_{\mathbf{1}}, v_{\mathbf{2}}, v_{\mathbf{4}}\}$ eine Basis von U.

Aufgabe 7

Die Menge U aller symmetrischen Matrizen lässt sich beschreiben durch

$$U = \{A | A \in M_7(\mathbb{R}), {}^tA = A\}.$$

(Dabei bezeichnet ${}^tA$ die zu A transponierte Matrix.)

a) Es sind die Unterraumeigenschaften aus (11.4) nachzuweisen.

U_1) Es sei $O \in M_7(\mathbb{R})$ die Nullmatrix. Nun ist ${}^tO = O$, d.h. $O \in U$.

U_2) Es seien $A, B \in U$. Nach (10.14 b) gilt

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A + B.$$

Der letzte Schritt ist richtig, da A und B symmetrische Matrizen sind. Insgesamt gilt also $A + B \in U$.

U_3) Es sei $r \in \mathbb{R}$ und $A \in U$. Dann gilt mit (10.14 c)

$${}^t(rA) = r\,{}^tA = rA.$$

Daraus folgt $rA \in U$.

Also ist U ein Unterraum von $M_7(\mathbb{R})$.

b) Die Menge der Basismatrizen $S := \{E_{ik} | i, k = 1, \dots, 7\}$ ist eine Basis von $M_7(\mathbb{R})$ (siehe Aufgabe 4). Für die Anzahl an Basiselementen gilt $|S| = 7^2 = 49$.

Behauptung: Die Menge $T := \{E_{ik} + E_{ki} | 1 \le i \le k \le 7\}$ ist eine Basis von U.

Achtung: Es muss $T \subseteq U$ gelten, d.h. die angegebene Basis muss aus symmetrischen Matrizen bestehen.

Zum Nachweis, dass T eine Basis ist, wird geprüft, ob $T \subseteq U$ gilt, sowie ob T ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

(a) Es gilt

$${}^t(E_{ik} + E_{ki}) = {}^tE_{ik} + {}^tE_{ki} = E_{ki} + E_{ik} = E_{ik} + E_{ki},$$

d.h. $T \subseteq U$.

(b) Aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \sum_{1 \le i \le k \le 7} a_{ik}(E_{ik} + E_{ki}) = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 2a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 2a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & 2a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & 2a_{77} \end{pmatrix}$$

folgt sofort: $a_{ik} = 0$ für alle $1 \le i \le k \le 7$.
Damit ist T also linear unabhängig.

(c) Es sei $A \in U$. Dann gilt $a_{ik} = a_{ki}$, und es gilt die Gleichung

$$A = \sum_{1 \le i < k \le 7} a_{ik}(E_{ik} + E_{ki}) + \sum_{i=1}^{7} \frac{1}{2} a_{ii}(E_{ii} + E_{ii}) \in \mathcal{L}(\mathcal{T}),$$

d.h. T ist ein Erzeugendensystem von U.

c) Für die Dimension gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}(U) = |T| = |\{(i,k) | 1 \le i \le k \le 7\}|\,.$$

Zur Bestimmung der Anzahl der Elemente von T betrachte man folgendes Tableau:

$i=1$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,7)$	7 Mögl.
$i=2$		$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$	$(2,7)$	6 Mögl.
$i=3$			$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$	$(3,7)$	5 Mögl.
$i=4$				$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$	$(4,7)$	4 Mögl.
$i=5$					$(5,5)$	$(5,6)$	$(5,7)$	3 Mögl.
$i=6$						$(6,6)$	$(6,7)$	2 Mögl.
$i=7$							$(7,7)$	1 Mögl.

Es ergibt sich:

$$|T| = \sum_{i=1}^{7} i = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (7+1) = 28,$$

also gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 28$.

Aufgabe 9

a) Es sei $T \subseteq V$ linear unabhängig, und es gelte $|T| = n = \dim_K(V)$. Ferner sei $U := \mathcal{L}_K(T) \subseteq V$. Dann ist T eine Basis von U und es gilt $\dim_K(U) = |T| = n$. Also ist $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $\dim_K(U) = \dim_K(V)$. Nach (11.30 b) folgt damit $U = V$, d.h. $V = \mathcal{L}_K(T)$. Folglich ist T ein Erzeugendensystem von V und damit insgesamt eine Basis.

b) Es sei $S := \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ eine Basis von V. Da f eine injektive K-lineare Abbildung ist, folgt nach (12.4 c), dass

$$f(S) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\} \subseteq W$$

eine linear unabhängige Teilmenge ist. Es gilt weiter nach Voraussetzung $\dim_K(W) = n$ sowie $n = |f(S)|$, da f injektiv ist und $|S| = n$ gilt. Nach Teil a) ist $f(S)$ eine Basis von W. Insbesondere gilt $\mathcal{L}_K(f(S)) = W$. Daher folgt

$$W = \mathcal{L}_K(f(S)) \overset{(12.4a)}{\Longrightarrow} f(\mathcal{L}_K(S)) = f(V) = \mathrm{Bild}(f).$$

Damit ist f surjektiv.

Aufgabe 10

Es sei $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung definiert durch $(a_{ik}) \mapsto (a_{ii}) \in \mathbb{R}^n$.

a) Zu prüfen sind die Eigenschaften, die in der Definition (12.1) aufgeführt werden.

$L_1)$ Es seien $A = (a_{ik}), B = (b_{ik}) \in M_n(\mathbb{R})$ gegeben. Dann ist $A + B = (a_{ik} + b_{ik})$. Es folgt nun

$$\boldsymbol{f(A+B)} = (a_{ii} + b_{ii}) = (a_{ii}) + (b_{ii}) = \boldsymbol{f(A) + f(B)}.$$

L_2) Es seien $r \in \mathbb{R}$ und $A = (a_{ik}) \in M_n(\mathbb{R})$. Dann folgt zunächst $rA = (ra_{ik})$. Es ergibt sich nun

$$\boldsymbol{f(rA)} = (ra_{ii}) = r(a_{ii}) = \boldsymbol{rf(A)}.$$

Damit ist f eine K-lineare Abbildung.

b) Für $n = 1$ ist $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und damit bijektiv. Zur weiteren Untersuchung kann man $n \geq 2$ voraussetzen.

f ist immer surjektiv. Zum Beweis sei ${}^t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

ein Urbild unter f, denn $f(A) = {}^t(a_1, \ldots, a_n)$.

f ist nicht injektiv, denn es gilt für die Nullmatrix $O \in M_n(\mathbb{R})$ bzw. die Basismatrix E_{1n} die Gleichung

$$f(E_{1n}) = o_{\mathbb{R}^n} = f(O),$$

und es ist $E_{1n} \neq 0$.

Aufgabe 12

a) Es seien $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ aus $M_n(K)$ und $r \in K$.

Zu zeigen ist:

L_1) $s(A + B) = s(A) + s(B)$ für alle $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

L_2) $s(rA) = r \cdot s(A)$ für alle $A \in M_n(\mathbb{R})$ und alle $r \in K$.

Dies kann folgendermassen geschehen:

L_1) Für die Summe gilt: $A + B = (a_{ik} + b_{ik})$. Damit folgt:

$$\boldsymbol{s(A+B)} = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \boldsymbol{s(A) + s(B)}$$

L_2) Hier gilt $rA = (r\, a_{ik})$. Dann folgt:

$$\boldsymbol{s(rA)} = \sum_{i=1}^{n}(r \cdot a_{ii}) = r \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \boldsymbol{r \cdot s(A)}.$$

Damit ist s eine lineare Abbildung.

b) Nach dem Rangsatz (12.10) gilt

$$\dim_K \big(M_n(K)\big) = \dim_K \big(\mathrm{Kern}(s)\big) + \dim_K \big(\mathrm{Bild}(s)\big). \tag{2}$$

Wir kennen die Dimension des Vektorraumes $M_n(K)$:

$$\dim_K \big(M_n(K)\big) = n^2.$$

Es ist nun die Dimension von $\mathrm{Bild}(s)$ zu berechnen. Es ist $\mathrm{Bild}(s)$ ein Unterraum von K. Ferner gilt $\dim_K(K) = 1$. Daher folgt:

$$0 \leq \dim_K \big(\mathrm{Bild}(s)\big) = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgt nun entweder

$$\dim_K(\mathrm{Bild}(s)) = 0 \tag{3}$$

oder

$$\dim_K(\mathrm{Bild}(s)) = 1. \tag{4}$$

Aus (3) würde $\mathrm{Bild}(s) = \{0\}$ folgen. Dies ist aber nicht möglich, da $s(E_{11}) = 1 \neq 0$ gilt. Daher muss (4) gelten. Mit (2) erhält man nun

$$n^2 = \dim_K(\mathrm{Kern}(s)) + 1,$$

woraus das gesuchte Ergebnis folgt:

$$\dim_K(\mathrm{Kern}(s)) = n^2 - 1.$$

Aufgabe 13

a) Zur Lösung bringt man die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Treppenform (Schritt 1), entfernt die vollständigen Nullzeilen (Schritt 2) und ergänzt dann mit vollständigen Nullzeilen bis auf der Diagonalen der Matrix die Einsen der charakteristischen Spalten stehen (Schritt 3) und ändert abschließend alle Nullen auf der Diagonalen um in Einsen (Schritt 4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt nun

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lös}(A, b), \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lös}(A, o_4).$$

Ferner ist $\{v_1\}$ eine Basis des Lösungsraumes $\mathrm{Lös}(A, o_4)$. Daher gilt

$$\mathrm{Lös}(A, b) = \{v_0 + rv_1 | r \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

b) Nach dem oben beschriebenen Schema erhält man hier als Zwischen- und Endergebnisse der Matrixumformungen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier gilt nun

$$v_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lös}(A, b), \qquad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ferner ist $\{v_1, v_2\}$ eine Basis des Lösungsraumes $\mathrm{Lös}(A, o_4)$. Daher folgt

$$\mathrm{Lös}(A, b) = \{v_0 + rv_1 + sv_2 | r, s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Aufgabe 14

Es sei $h := g \circ f : U \to W$.
Zu zeigen ist:

$L_1)$ $h(u_1 + u_2) = h(u_1) + h(u_2)$ für alle $u_1, u_2 \in U$

$L_2)$ $h(ru_1) = r \cdot h(u_1)$ für alle $u_1 \in U$ und alle $r \in \mathbb{R}$.

Dies kann folgendermassen geschehen:

$L_1)$ Es seien $u_1, u_2 \in U$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h(u_1 + u_2)} &= (g \circ f)(u_1 + u_2) = g(f(u_1 + u_2)) \\ &= g(f(u_1) + f(u_2)) && \text{da } f \ K\text{-linear ist} \\ &= g(f(u_1)) + g(f(u_2)) && \text{da } g \ K\text{-linear ist} \\ &= (g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2) = \boldsymbol{h(u_1) + h(u_2)} \end{aligned}$$

$L_2)$ Nun sei $u_1 \in U$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h(ru_1)} &= (g \circ f)(ru_1) = g(f(ru_1)) \\ &= g(rf(u_1)) && \text{da } f \ K\text{-linear ist} \\ &= rg(f(u_1)) && \text{da } g \ K\text{-linear ist} \\ &= r(g \circ f)(u_1) = \boldsymbol{r \cdot h(u_1)}. \end{aligned}$$

Damit ist h eine lineare Abbildung.

Aufgabe 15

a) f muss bijektiv sein, d.h. A muss invertierbar sein. Die Umkehrabbildung f^{-1} wird durch die Multiplikation mit der inversen Matrix A^{-1} bewirkt, d.h. es gilt

$$f^{-1}(v) = A^{-1}v \text{ für alle } v \in \mathbb{Z}_{29}^n.$$

b) Die Tabelle 1 listet die Zuordnung von Zeichen zu einer ganzen Zahl auf.

(a) Es sei $g = f^{-1} = f_{A^{-1}}$. Wir müssen die inverse Matrix von A bilden. Da die Matrix Elemente aus $\mathbb{Z}_{29}$ enthält, gelten u.a. die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} &5 \cdot 6 \equiv 30 \equiv 1 \pmod{29}, \\ &5^{-1} \equiv 6 \pmod{29}, \\ &6^{-1} \equiv 5 \pmod{29}. \end{aligned}$$

Mit diesen Daten kann man nun die Inverse von A ausrechnen, indem man neben die Matrix A die passende Einheitsmarix notiert und $T(A)$ berechnet. Am Ende steht (bei vollständiger

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	,	.	␣	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	

Tabelle 1: Kodierungszuordnung

Durchführung) in den Plätzen der Einheitsmatrix gerade die Inverse von A.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & -36 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diese Daten modulo 29 gerechnet, ergeben

$$g(u) = A^{-1}(u)$$

mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 22 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Die verschlüsselte Botschaft wird in Zahlenblöcke der Länge vier zerlegt. Diese Blöcke werden dann mit A^{-1} multipliziert und wieder in Zeichen umgesetzt. Dann ergibt sich für die drei Teilschriften:

$$\text{CAFN} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{MATH}$$
$$\text{DLUX} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 20 \\ 23 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 20 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 8 \\ 18 \\ 28 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \sqcup\text{IS}\sqcup$$
$$\text{QNSR} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 18 \\ 17 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{FUN.}$$

Der gesamte unverschlüsselte Satz lautet also

$$\text{MATH}\sqcup\text{IS}\sqcup\text{FUN.}$$

(c) Die entschlüsselte Botschaft lautet hier:

DIE ⊔ KUNST ⊔ DER ⊔ MATHEMATIK, ⊔ IST ⊔ RECHNEN ⊔ ZU ⊔ VERMEIDEN. ⊔

Aufgabe 16

a) Entwicklung nach der zweiten Spalte liefert:

$$\det(A) = (-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-2)(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(4-1) - (-12) = 6 + 12 = 18.$$

b) Hier entwickelt man nach der zweiten Zeile und erhält

$$\begin{aligned}\det(B) &= (-2)\begin{vmatrix} 1 & -2+2i \\ 2-i & 1+2i \end{vmatrix} = (-2)\big(1+2i-(2-i)(-2+i)\big) \\ &= (-2)\big(1+2i+(-2+i)(-2+i)\big) = (-2)\big(1+2i+i^2-4i+4\big) = -8+4i.\end{aligned}$$

c)

$$\det(C) \equiv 6\cdot 9 - 2\cdot 7 \equiv 54-14 \equiv 40 \equiv 7 \pmod{11}.$$

d) Durch Addition der letzten beiden Zeilen erhält man in der dritten Zeile einige Nullen, so dass die Rechnung einfacher wird:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & -2 \\ 7 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & -2 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 12\big(-10-12\big) = 12(-22) = -264.$$

Aufgabe 17

Zunächst berechnet man für $n = 1,2,3$ die Determinanten explizit aus:

$$\begin{aligned}\det(D_1) &= a_{11}, \\ \det(D_2) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}, \\ \det(D_3) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}) = a_{11}a_{22}a_{33}.\end{aligned}$$

Von diesen Ergebnissen aus vermutet man

$$\det(D_n) = a_{11}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n:

(IA): Für $n = 1$ gilt $\det(D_1) = a_{11}$.

(IV): Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und es gelte $\det(D_n) = a_{11}\cdots a_{nn}$.

(IB):

$$\det(D_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii}.$$

(IS): Entwicklung von $\det(D_{n+1})$ nach der letzten Zeile liefert

$$\det(D_{n+1}) = (-1)^{(n+1)+(n+1)}a_{n+1,n+1}\cdot\det(D_n) \overset{(IV)}{=} a_{n+1,n+1}\cdot\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii}.$$

Damit ist die geratene Formel bewiesen.

Aufgabe 18

a) Es gibt drei Arten von Elementarmatrizen:

(a) Vertauschungsmatrizen V_{ik} mit $i \neq k$: Dann gilt ${}^tV_{ik} = V_{ki}$. Da V_{ik} aus E_n durch Vertauschen zweier Zeilen hervorgeht, gilt:

$$\begin{aligned}\det(V_{ik}) &= -\det(E_n) = -1 \\ \det({}^tV_{ik}) &= \det(V_{ki}) = -1\end{aligned}$$

Daher gilt $\det({}^tV_{ik}) = \det(V_{ik})$.

(b) Additionsmatrizen $A_{ik}(a)$: Diese sind Dreiecksmatrizen mit $i \neq k$, bei denen auf der Hauptdiagonalen nur 1'en auftreten. Nach Aufgabe 17 gilt daher

$$\det(A_{ik}(a)) = 1.$$

Weiter gilt

$$^tA_{ik}(a) = A_{ki}(a),$$

woraus folgt

$$\det(^tA_{ik}(a)) = 1.$$

Daher stimmt die Behauptung auch hier.

(c) Multiplikationsmatrizen $D_i(a)$: Diese Matrizen sind Dreiecksmatrizen mit einer Hauptdiagonalen, welche an allen Stellen außer der i-ten mit 1 besetzt ist. An der Stelle i ist das Element a vorhanden. Nach Aufgabe 17 gilt somit

$$\det(D_i(a)) = a$$

und wegen

$$^tD_i(a) = D_i(a)$$

folgt die Behauptung.

b) Nach (10.27) kann man eine invertierbare Matrix als Produkt von Elementarmatrizen G_i mit Indices $i = 1, \ldots, s$ schreiben, d.h.

$$A = G_1 \cdot \ldots \cdot G_s.$$

Es folgt mit (10.14d) die Gleichung

$$^tA = {}^t(G_1 \cdot \ldots \cdot G_s) = {}^tG_s \cdot \ldots \cdot {}^tG_1,$$

und damit dann

$$\begin{aligned}\det(^tA) &= \det(^tG_s \cdot \ldots \cdot {}^tG_1) \overset{(13.8)}{=} \det(^tG_s) \cdot \ldots \cdot \det(^tG_1) \overset{a)}{=} \det(G_s) \cdot \ldots \cdot \det(G_1)\\ &\overset{\text{Komm.}}{=} \det(G_1) \cdot \ldots \cdot \det(G_s) \overset{(13.8)}{=} \det(G_1 \cdot \ldots \cdot G_s) = \det(A).\end{aligned}$$

Aufgabe 19

a) Zu zeigen sind die beiden Linearitätsbedingungen. Dazu seien im folgenden $a = (a_i)$ und $a' = (a'_i)$ beliebige Elemente aus K^n und $r \in K$ beliebig. Dann gilt:

L_1)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f((a_i) + (a'_i))} &= f((a_i + a'_i)) = ((a_i + a'_i)b_i) = (a_ib_i + a'_ib_i)\\ &= (a_ib_i) + (a'_ib_i) = \boldsymbol{f((a_i) + f(a'_i)},\end{aligned}$$

L_2)

$$\boldsymbol{f(r(a_i))} = f((ra_i)) = ((ra_i)b_i) = (r(a_ib_i)) = r(a_ib_i) = \boldsymbol{rf((a_i))}.$$

Damit ist f eine K-lineare Abbildung.

b) Die Darstellungsmatrix $M(f)$ von der Abbildung f ist definiert durch

$$M(f) = \big(f(e_1)\dots f(e_n)\big) \in M_n(K),$$

wobei $e_i \in K^n$ der i-te Einheitsvektor ist.

Es gilt nun

$$f(e_i) = b_i e_i \Longrightarrow M(f) = \begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

c) Nach (12.9) ist f genau dann ein Isomorphismus, wenn die zugehörige Darstellungsmatrix $M(f)$ invertierbar ist. Diese Eigenschaft ist aber äquivalent zu der Aussage $\det(M(f)) \neq 0$ (nach (13.9a)). Mit Aufgabe 17 berechnet man nun

$$\det(M(f)) = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n,$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

Aufgabe 20

a) Es gilt:

$$(3+2i)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 \cdot 2i + 3\cdot 3\cdot (2i)^2 + (2i)^3 = 27 + 54i - 36 - 8i = -9 + 46i,$$
$$\frac{1+i}{2-3i} = \frac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+2i-3}{4^2-9i^2} = -\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i.$$

b) Es gilt $i^n = 1$ für $n \equiv 0 \pmod 4$, denn wenn $n = 4k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ ist, so folgt

$$i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1.$$

Es gilt $i^n = i$ für $n \equiv 1 \pmod 4$, denn wenn $n = 4k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ ist, so folgt

$$i^n = i^{4k+1} = (i^4)^k \cdot i = 1^k \cdot i = i.$$

Es gilt $i^n = -1$ für $n \equiv 2 \pmod 4$, denn wenn $n = 4k+2$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ ist, so folgt

$$i^n = i^{4k+2} = (i^4)^k \cdot i^2 = 1^k \cdot i^2 = -1.$$

Es gilt $i^n = -i$ für $n \equiv 3 \pmod 4$, denn wenn $n = 4k+3$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ ist, so folgt

$$i^n = i^{4k+3} = (i^4)^k \cdot i^3 = 1^k \cdot i^2 \cdot i = -i.$$