Aufgabe 46

Nach (16.21 d) gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le 1 + \frac{n}{2}$ die Abschätzung

$$|\exp(z) - s_n(z)| \le 2\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ mit } s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

Für $z = 1$ ist $|z| \le 1 + \frac{n}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt, also gilt

$$|\exp(1) - s_n(1)| = |e - s_n(1)| \le \frac{2}{(n+1)!} \text{ mit } s_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Der Fehler $|e - s_n(1)|$ ist auf jeden Fall kleiner als 10^{-30}, wenn man $n \in \mathbb{N}$ so wählt, dass gilt

$$\frac{2}{(n+1)!} < 10^{-30} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(n+1)!}{2} > 10^{30} \quad \Longleftrightarrow \quad (n+1)! > 2 \cdot 10^{30}.$$

Durch Ausprobieren erhält man $n = 28$ bzw. $n \ge 28$.

Dieses Ausprobieren sieht mit Maple z.B. so aus wie in Abbildung 1 auf Seite 10.

Aufgabe 47

a) Es ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k = k^2$ gegeben. Mit (16.26 b) erhält man:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2}{k^2} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \to 1 \Longrightarrow \rho = 1.$$

b) Nun wird $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k = \frac{1}{6 \cdot k^k}$ betrachtet. Mit (16.26 a) gilt:

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{k \cdot \sqrt[k]{6}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt[k]{6}} \to 0 \cdot 1 = 0 \Longrightarrow \rho = \infty.$$

c) Hier ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k = \frac{3^k}{k}$ gegeben. Mit (16.26 a) gilt:

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{3}{\sqrt[k]{k}} \to \frac{3}{1} = 3 \Longrightarrow \rho = \frac{1}{3}.$$

d) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k = \frac{1}{k \cdot 2^k}$ ist zu untersuchen. Mit (16.26 a) folgt:

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k} \cdot 2} \to \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \rho = 2.$$

Für die Stelle $z = 2$ folgt nun

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Daher ist für $z = 2$ die Potenzreihe divergent.

Für die Stelle $z = -2$ folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (-2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} (-1)^k \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Dies ist nach dem Leibniz-Kriterium eine konvergente Reihe, daher konvergiert die Potenzreihe für $z = -2$.

Aufgabe 48

a) Folgende Umrechnung ist nötig:

$$\begin{aligned}
1,23\overline{45} &= 1 + 2\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 4\cdot 10^{-3} + 5\cdot 10^{-4} + 4\cdot 10^{-5} + 5\cdot 10^{-6} + \cdots \\
&= 1 + 2\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 4\cdot 10^{-3}\left(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots\right) + 5\cdot 10^{-4}\left(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots\right) \\
&= 1 + 2\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + (\frac{4}{1000} + \frac{5}{10000})\cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k \\
&= 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \left(\frac{40+5}{10000}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right) = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{45}{10000}\cdot\frac{100}{99} \\
&= \frac{1100 + 220 + 33 + 5}{1100} = \frac{1358}{1100} = \frac{679}{550}
\end{aligned}$$

b) Wandle $\frac{11}{3}$ in einen Dualbruch um, indem Divison mit Rest von 11 durch 3 durchgeführt wird:

$$\begin{aligned}
11 &= 3\cdot 3 + 2 \\
2\cdot 2 = 4 &= 1\cdot 3 + 1 \\
2\cdot 1 = 2 &= 0\cdot 3 + 2 \\
2\cdot 2 = 4 &= 1\cdot 3 + 1 \quad \text{(ab hier wiederholt sich die Rechnung)}
\end{aligned}$$

Da $3 = (11)_2$ gilt, ergibt sich insgesamt $\frac{11}{3} = (11,\overline{10})_2$.

Aufgabe 49

Nach (16.29) gibt es zu $y \in \mathbb{R}$ mit $0 \le y < 1$ Zahlen $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ mit

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} = \lim_{n\to\infty} s_n \text{ mit } s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 10^{-k} \in \mathbb{Q},$$

denn s_n ist als Summe von Produkten rationaler Zahlen wieder rational.
Jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ lässt sich schreiben als $x = \lfloor x \rfloor + y$. wobei $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}_0$ und $0 \le y < 1$ gilt. Ferner ist y eine reelle Zahl.
Es sei nun $q := \lfloor x \rfloor + s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $q_n \in \mathbb{Q}$, da $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}_0$ und $s_n \in \mathbb{Q}$ gilt. Weiter gilt:

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lfloor x \rfloor + \lim_{n\to\infty} s_n = \lfloor x \rfloor + y = x.$$

Aufgabe 50

a) (a) Es sei (x_n) eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$. Dann folgt wg. $x^4 + 3x^2 + 13 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x_n) = \sqrt{x_n^4 + 3x_n^2 + 13} \xrightarrow{\text{Aufg. 31}} \sqrt{81 + 27 + 13} = \sqrt{121} = 11,$$

d.h. $\lim_{x\to 3} f(x) = 11$.

(b) Es ist

$$g(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}\left(1 - \frac{4}{x+2}\right) = \frac{1}{x-2}\frac{x+2-4}{x+2} = \frac{1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x+2} = \frac{1}{x+2}.$$

Es sei (x_n) eine beliebige Folge in $]-2,+2[$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4},$$

d.h. $\lim_{x\to 2} g(x) = \frac{1}{4}$.

b) Es sei $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ Dann gilt $0 \le x_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Es folgt nun $\lim\limits_{n\to\infty} \lfloor x_n \rfloor = 0$.

Nun sei $x'_n = 1 + \frac{1}{n+1}$. Dann gilt $1 \le x'_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 1$. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \lfloor x'_n \rfloor = 1$.

Also gibt es zwei Folgen in $[0,2]$, die gegen 1 konvergieren, für die die Folgen der Funktionswerte aber verschiedene Grenzwerte haben, d.h. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ existiert nicht.

Aufgabe 51

a) Es sei zunächst $a > 0$ und (x_n) eine beliebige Folge in $\mathbb{R}_{\ge 0}$, die gegen a konvergiert. Nach Aufgabe 31 gilt $(\sqrt{x_n}) \to \sqrt{a}$, d.h.

$$\lim_{x\to a} w(x) = \lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} = w(a),$$

also ist w stetig in $a > 0$.

Nun sei $a = 0$ und (x_n) sei eine beliebige Folge in $\mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $x_n \to 0$. Dann folgt wie in obiger Rechnung $\sqrt{x_n} \to \sqrt{0} = 0$, d.h. $\lim\limits_{x\to 0^+} w(x) = w(0)$. Daher ist w in $x = 0$ rechtsseitig stetig.

b) Es gilt $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } 2 \le x < 3 \\ 3 & \text{für } x = 3 \end{cases}$

Nun sei $2 < a < 3$ und $(x_n) \subset [2,3]$ eine Folge mit $(x_n) \to a$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n < 3$ für alle $n \ge n_0$. Damit folgt dann $f(x_n) = 2$ für alle $n \ge n_0$. Also gilt $(f(x_n)) \to 2 = f(a)$, d.h. f ist stetig in $]2,3[$.

Es sei nun $a = 2$ und (x_n) eine Folge in $[2,3]$ mit $x_n > 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n) \to 2$. Dann gibt es wieder einen Index n_0 mit $x_n < 3$ für alle $n \ge n_0$. Daraus folgt $f(x_n) = 2$ für alle $n \ge n_0$ und damit wieder $(f(x_n)) \to 2 = f(2)$. Aus diesen Folgerungen ergibt sich, dass f rechtsseitig stetig in $x = 2$ ist.

Jetzt wird noch $a = 3$ und (x_n) eine Folge in $[2,3]$ betrachtet mit $x_n < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt: $f(x_n) = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $(f(x_n)) \to 2 \ne 3 = f(3)$. Damit ist f nicht linksseitig stetig in $x = 3$.

c) Es sei $a \ne 3$. Dann ist die Nennerfunktion in a stetig und nicht Null, also ist nach (18.4 b) g stetig in a.

Ist $a = 3$, so sei (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n > 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n) \to 3$. Dann gilt $x_n - 3 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $(x_n - 3) \to 0$. Nach (15.23) folgt dann, dass $g(x) = \frac{1}{x_n - 3} \to \infty$ gilt. Also ist $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = \infty$, daher ist g nicht stetig in 3, denn $g(3) = 0$.

Aufgabe 52

a) Es sei $x > 0$. Dann gilt:

$$\exp(x) = 1 + x + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{>0} > 1 + x > 1.$$

b) Es sei $x < x'$. Dann ist $y = x - x' > 0$ und es folgt

$$\exp(x') = \exp(y + x) \overset{(16.21\ e)}{=} \exp(y) \cdot \exp(x) \overset{(*)}{>} \exp(x),$$

weil $\exp(y) > 1$ nach Teilaufgabe a) und $(*)$ gelten. Lezteres gilt, da $\exp(x) \ne 0$ ist nach (16.21 f). Es gilt zusätzlich $\exp(x) \ge 0$ für alle $\in \mathbb{R}$ wegen der Ungleichung

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 \ge 0.$$

c) Nach a) gilt $\exp(x) > 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Es sei nun (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Es ist zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \infty$.

Um dies zu zeigen, wird die Eigenschaft aus der Definition (15.21) nachgewiesen:

Es sei dazu $K \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n > K - 1$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt:

$$\exp(x_n) > 1 + x_n > 1 + (K-1) = K \text{ für alle } n \geq n_0,$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \infty$, also auch $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.

Aufgabe 53

a) Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Nach Aufgabe 49 gibt es für $x > 0$ eine Folge rationaler Zahlen q_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$. (Dass (q_n) monoton wachsend ist, spielt hier keine Rolle.)

Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$, und es gibt $q'_n \in \mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} q'_n = -x$, daher gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} -q'_n = x$ mit $-q'_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $x = 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

Daher existieren zu jedem $x \in \mathbb{R}$ Folgen (r_n) rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Da f stetig in x ist, folgt:

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = 0,$$

da $f(r_n) = 0$ gilt.

b) Da $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind, ist auch $h := f - g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Nun gilt wegen $f(r) = g(r)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ ebenfalls $h(r) = 0$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Nach Teilaufgabe a) folgt dann $h = 0$, also $f = g$.

Aufgabe 54

a) Nach (17.9 e) gilt $(a_n) \sim (b_n) :\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Es sind die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität zu prüfen:

Reflexivität: Für alle $(a_n) \in F$ gilt $(a_n) \sim (a_n)$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ immer gilt.

Symmetrie: Es seien $(a_n), (b_n) \in F$ beliebig mit $(a_n) \sim (b_n)$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Mit (15.8) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{b_n}{a_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}} = \frac{1}{1} = 1,$$

d.h. $(b_n) \sim (a_n)$.

Transitivität: Es seien $(a_n), (b_n), (c_n) \in F$ mit $(a_n) \sim (b_n)$ und $(b_n) \sim (c_n)$. Dann gelten die Gleichungen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1.$$

Nach (15.8) ist dann auch $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \cdot \left(\frac{b_n}{c_n}\right) = \left(\frac{a_n}{c_n}\right)$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1 \cdot 1 = 1,$$

d.h. $(a_n) \sim (c_n)$.

Damit ist die asymptotische Gleichheit eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Folgen von Zahlen aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Die Behauptung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \mathcal{O}(x^3) \text{ für } x \to 0$$

kann umgeschrieben werden zu

$$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) = \mathcal{O}(x^3) \text{ für } x \to 0$$

und bedeutet nach (17.13 d), dass gilt

$$\left|\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2)\right| = C \cdot \left|x^3\right| \text{ mit } C \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Zum Nachweis der Behauptung muss also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gefunden werden, so dass Gleichung (1) erfüllt ist.

Für $|x| < 1$ gilt zunächst $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ (geometrische Reihe). Damit folgt für die linke Seite aus Gleichung (1)

$$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) = \sum_{k=3}^{\infty} x^k = x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^3}{1-x}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{2}$ gilt dann:

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot(-1)} \frac{1}{2} > -x > -\frac{1}{2} \xrightarrow{+1} \frac{3}{2} > 1 - x > \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{bilden}]{\text{Kehrwert}} \frac{2}{3} < \frac{1}{1-x} < 2.$$

Damit folgt nun

$$\left|\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2)\right| = \left|\frac{x^3}{1-x}\right| < 2 \cdot \left|x^3\right| \text{ für } |x| < \frac{1}{2}.$$

Es sei nun $I =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Dann gilt $0 \in I$ und für alle $x \in I$ gilt $\left|\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2)\right| < 2 \cdot \left|x^3\right|$.

Nach Definition (17.12) bedeutet dies gerade $\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) = \mathcal{O}(x^3)$.

Aufgabe 55

a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann folgt $a \cdot b > 0$ und $(ab)^x$ ist nach (19.7) definiert (d.h. kann gebildet werden). Dann gilt:

$$\begin{aligned}(ab)^x &= \exp_{ab}(x) = \exp(x \ln(ab)) \overset{(19.3\text{ d})}{=} \exp(x(\ln(a) + \ln(b))) \\ &= \exp(x \ln(a) + x \ln(b)) \overset{(16.21\text{ e})}{=} \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(x \ln(b)) = a^x \cdot b^x.\end{aligned}$$

b) Es sei $0 < a < 1$ gegeben. Es ist zu zeigen: Aus $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $x < x'$ folgt $\exp_a(x) > \exp_a(x')$.

Es gilt $\exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$ und $\exp_a(x') = \exp(x' \ln(a))$. Da $0 < a < 1$ gilt, folgt $\ln(a) < 0$. Damit ergibt sich:

$$x < x' \xrightarrow{\cdot \ln(a)} x \ln(a) > x' \ln(a) \xrightarrow[\text{monoton wachsend}]{\text{exp ist streng}} \exp(x \ln(a)) > \exp(x' \ln(a)) \xrightarrow[\text{nennen}]{\text{Umbe-}} \exp_a(x) > \exp_a(x').$$

c) Es sei $a > 0$. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft $\exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$.

Die Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = x \cdot \ln(a)$ ist stetig nach (18.4 a), da $f_a = \ln(a) \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ stetige Funktionen sind. Die Funktion exp ist nach (19.1 c) stetig.

Damit folgt

$$\exp_a(x) = \exp(x\ln(a)) = \exp(f_a(x)) = (\exp\circ f_a)(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt $\exp_a = \exp\circ f_a$. Nach (18.7) ist $\exp_a$ als Hintereinanderausführung zweier stetiger Funktionen wieder stetig.

d) Es sei $a > 0$ und $a \neq 1$. Die Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = x\ln(a)$ ist surjektiv, da $\ln(a) \neq 0$ für $a \neq 1$ gilt.

Nun sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert mit $x = \dfrac{y}{\ln(a)}$ ein Urbild unter f_a, denn es gilt

$$f_a\left(\frac{y}{\ln(a)}\right) = \frac{y}{\ln(a)} \cdot \ln(a) = y.$$

Also gilt $\mathrm{Bild}(f_a) = \mathbb{R}$.

Nach (18.11) gilt $\mathrm{Bild}(\exp) = \mathbb{R}_{>0}$. Daher folgt

$$\mathrm{Bild}(\exp_a) = \exp_a(\mathbb{R}) = (\exp\circ f_a)(\mathbb{R}) = \exp(f_a(\mathbb{R})) = \exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}.$$

Aufgabe 56

a) Nach (19.11) besitzen cos bzw. sin die Reihendarstellung

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{bzw.} \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2+1}}{(2k+1)!}.$$

Damit ergeben sich folgende Rechnungen:

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x), && \text{da } 2k \text{ gerade ist.}\\
\sin(-x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k)!}\\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(x), && \text{da } (-1)^{2k+1} = (-1)(-1)^{2k} = -1 \text{ gilt.}
\end{aligned}$$

b) Zunächst sei $k \geq 0$. Der Beweis wird dann mit vollständiger Induktion geführt:

(IA) $k = 0$: $\quad \sin(0\cdot\pi) = \sin(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 0^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0.$

(IV) Es gelte die Behauptung für ein $k \geq 0$.

(IS) $k \to k+1$:

$$\sin((k+1)\pi) = \sin(k\pi+\pi) \overset{(19.13)}{=} \sin(k\pi)\cos(\pi) + \cos(k\pi)\sin(\pi) = 0\cdot\cos(\pi) + \cos(k\pi)\cdot 0,$$

denn $\sin(k\pi) = 0$ nach (IV) und $\sin(\pi) = \sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) = 2\cdot 1\cdot 0 = 0.$

Nun sei $k < 0$. Dann gilt unter Ausnutzung von dem Fall $k \geq 0$:

$$\sin(k\pi) = \sin(-|k|\,\pi) \overset{a)}{=} -\sin(|k|\,\pi) = 0.$$

c) Es gilt $e^{i2\pi k} = 1$ für alle $z \in \mathbb{Z}$, denn:

$$e^{i2\pi k} = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) \overset{b)}{=} \cos(2\pi k) + i\cdot 0 \overset{?}{=} 1.$$

Behauptung: $\cos(2\pi k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Der Beweis wird ähnlich wie in b) geführt:

(IA) $k = 0$: $\cos(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 0^{2k}}{(2k)!} = 1.$

(IV) Es gelte die Behauptung für ein $k \geq 0$.

(IS) $k \to k+1$:

$$\cos(2(k+1)\pi) = \cos(2k\pi + 2\pi) \stackrel{(19.21\text{ a})}{=} \cos(2k\pi) \stackrel{(\text{IV})}{=} 1.$$

Im Fall $k < 0$ gilt:

$$\cos(2\pi k) = \cos(-2\pi\,|k|) \stackrel{a)}{=} \cos(2\pi\,|k|) = 1.$$

Damit ist auch der letzte Schritt in der obigen Rechnung erklärt.

d) Um $\sin(x) - \sin(x') = 2\cos\left(\frac{x+x'}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x'}{2}\right)$ nachzuprüfen gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Setze $u := \frac{1}{2}(x + x')$ und $v := \frac{1}{2}(x - x')$. Dann gilt $u + v = x$ und $u - v = x'$ und es folgt:

$$\begin{aligned}
\sin(x) - \sin(x') &= \sin(u+v) - \sin(u-v) \\
&= \sin(u)\cos(v) + \sin(v)\cos(u) - [\sin(u)\cos(-v) + \cos(u)\sin(-v)] \\
&= \sin(u)\cos(v) + \sin(v)\cos(u) - \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v) \\
&= 2\cos(u)\sin(v) = 2\cos\left(\frac{x+x'}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x'}{2}\right).
\end{aligned}$$

(b) Wende auf die rechte Seite die Beschreibung von sin und cos durch die Exponentialfunktion an und rechne den Ausdruck aus:

$$\begin{aligned}
2\cos\left(\frac{x+x'}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x'}{2}\right) &= 2\left[\frac{1}{2}\left(e^{i(\frac{x+x'}{2})} + e^{-i(\frac{x+x'}{2})}\right)\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i(\frac{x-x'}{2})} - e^{-i(\frac{x-x'}{2})}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[e^{ix} - e^{ix'} + e^{-ix'} - e^{-ix}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) - \left(e^{ix'} - e^{-ix'}\right)\right] \\
&= \sin(x) - \sin(x').
\end{aligned}$$

Aufgabe 57

a) Es sei (x_n) eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty$. Es ist zu zeigen, dass $(g(x_n)) \to \infty$ gilt.

Der Nachweis geschieht mit Hilfe der Definition (15.21):

Es sei $K \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ exitiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $f(x_n) \geq K$ für alle $n \geq n_1$.

Wegen $(x_n) \to \infty$ existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq x_0$ für alle $n \geq n_2$.

Es sei $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt $g(x_n) \geq f(x_n) > K$ für alle $n \geq n_0$.

b) Für $x > 0$ gilt $\frac{x^n}{n!} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und daher folgt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \sum_{k=0}^{m+1} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{e^x}{x^m} > \frac{x}{(m+1)!}.$$

Da $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(m+1)!} = \infty$ gilt, folgt mit Teilaufgabe a) die Eigenschaft $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$.

Aufgabe 58

Es ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben und durch $f(x) = x \cdot |x|$ definiert.

a) Die Untersuchung erfolgt auf Grundlage der Definition:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot |x| - 0}{x - 0} = |x|$$
$$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{n \to \infty} |x| \overset{(*)}{=} |0| = 0.$$

$(*)$ gilt, da $x \mapsto |x|$ in $x = 0$ stetig ist.

Damit ist f in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

b) Für $x \neq 0$ sind $x \mapsto |x|$ und $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ differenzierbar, daher ist f als Produkt zweier differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar.

c) Für $x \neq 0$ gilt nach der Produktregel

$$f'(x) = x' \cdot |x| + x \cdot |x|' = \begin{cases} 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x = 2\,|x|\,, & x > 0, \\ 1 \cdot (-x) + x \cdot (-1) = -2x = 2 \cdot (-x) = 2\,|x|\,, & x < 0, \\ 0 = 2 \cdot |0|\,, & \text{s.o.} \end{cases}$$

Also gilt $f'(x) = 2 \cdot |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. f' ist eine stetige Funktion, demnach ist f stetig differenzierbar.

d) Die Betragsfunktion ist in $x = 0$ nicht differenzierbar (siehe (20.2g)), daher ist f' in $x = 0$ nicht differenzierbar. Damit ist f nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe 59

a) Es ist $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da e^x und e^{-x} differenzierbar sind (Kettenregel), ist auch sinh differenzierbar.

Die Ableitung ist

$$\sinh'(x) = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - (-e^{-x})\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh(x),$$

d.h. $\sinh' = \cosh$.

b) Da $e^x > 0$ und $e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ergibt sich

$$0 < \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh(x) = \sinh'(x),$$

d.h. $\sinh'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist sinh nach (20.15 b) streng monoton wachsend.

c) Die Funktin sinh ist stetig (da sie differenzierbar ist) und streng monoton wachsend. Die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ sind

$$\lim_{x \to \infty} \sinh(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \sinh(x) = -\infty.$$

Daher ist $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion $\sinh^{-1} = \operatorname{arsinh}$.

Da $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist die Funktion $\operatorname{arsinh} = \sinh^{-1}$ differenzierbar.

d) Nach (20.6) gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion arsinh:

$$\operatorname{arsinh}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh})} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh})}.$$

Mit der Umformung

$$\begin{aligned} y = \operatorname{arsinh}(\mathrm{x}) &\Longrightarrow \cosh^2(z) \overset{(*)}{=} \sinh^2(y) + 1 = \sinh^2(\operatorname{arsinh}(\mathrm{x})) + 1 = \mathrm{x}^2 + 1 \\ &\Longrightarrow \cosh(y) = \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

folgt schließlich

$$\operatorname{arsinh}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\cosh(\mathrm{y})} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^2+1}}.$$

Die Gleichung $(*)$ gilt, wegen folgender Rechnung:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Aufgabe 60

a) Der Beweis für die Aussage $(x^n)' = nx^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wird mit Hilfe der vollständigen Induktion geführt:

(IA) $n = 1$: $(x^1)' = x' = 1 = 1 \cdot x^0$.

(IV) Es gelte $(x^n)' = nx^{n-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned} (x^{n+1})' &= (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' \\ &\overset{(\mathrm{IV})}{=} n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n. \end{aligned}$$

b) Die Differentiationsregeln ergeben:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k)' \\ &\overset{\text{a)}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}. \end{aligned}$$

c) Mit Hilfe der Differentiationsregeln ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left[\sin\left(\frac{2x^3+x^2-1}{e^x}\right)\right]' &= \sin'\left(\frac{2x^3+x^2-1}{e^x}\right) \cdot \left(\frac{2x^3+x^2-1}{e^x}\right)' \\ &= \cos\left(\frac{2x^3+x^2-1}{e^x}\right) \cdot \frac{(6x^2+2x)\cdot e^x - e^x(2x^3+x^2-1)}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x)^2}\left(-2x^3+5x^2+2x+1\right) \cdot \cos\left(\frac{2x^3+x^2-1}{e^x}\right) \\ &= \frac{1}{e^x}\left(-2x^3+5x^2+2x-1\right) \cdot \cos\left(\frac{2x^3+x^2-1}{e^x}\right). \end{aligned}$$

d) Unter Anwendung der Regeln von L'Hospital ergeben sich folgende Rechnungen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0, \text{ da } \lim_{x\to\infty} e^x = +\infty.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(2x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(2x)\cdot(-\sin(2x)\cdot 2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)\sin(2x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(x)}{1} \overset{(*)}{=} 4\cos(0) = 4. \end{aligned}$$

Bei der zweiten Berechnung wurde in Schritt $(*)$ ausgenutzt, dass cos in $x = 0$ stetig ist.

```
> 28!;
                  304888344611713860501504000000
> length(%);
                                30
> evalb(%%>2*10^30);
                               false
> 29!;
                  8841761993739701954543616000000
> length(%);
                                31
> evalb(%%>2*10^30);
                               true
> DIGITS:=35;
                             Digits:=35
> evalf(sum(1/k!,k=0..28));
                 2.7182818284590452353602874713525455
> evalf(exp(1));
                 2.7182818284590452353602874713526625
```

Abbildung 1: Maple-Anweisungen zu Aufgabe 46