Aufgabe 21

Es sei $z = 8i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$ und $\varphi = \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ $(\widehat{=} 90°)$. Für die dritten Wurzeln w_k mit $k \in \{0,1,2\}$ aus z gilt nach (14.8) die Formel

$$w_k = \sqrt[3]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right)\right] \qquad (k \in \{0,1,2\}).$$

Es gilt nun:

$$\sqrt[3]{|z|} = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Damit ergeben sich folgende Lösungen:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left[\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\frac{1}{2}\right] = \sqrt{3} + i\\
w_1 &= 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2\left[-\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\frac{1}{2}\right] = -\sqrt{3} + i\\
w_2 &= 2\left[\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = -2i.
\end{aligned}$$

Die Proberechnungen sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
w_0^3 &= (\sqrt{3}+i)^3 = (\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2\, i + 3\sqrt{3}\, i^2 + i^3 = 3\sqrt{3} + 9i - 3\sqrt{3} - i = 8i,\\
w_1^3 &= (-\sqrt{3}+i)^3 = (-\sqrt{3})^3 + 3(-\sqrt{3})^2\, i + 3(-\sqrt{3})\, i^2 + i^3 = -3\sqrt{3} + 9i + 3\sqrt{3} - i = 8i,\\
w_2^3 &= (-2i)^3 = (-8)^3 = (-8)(-i) = 8i.
\end{aligned}$$

Die grafische Veranschaulichung findet man in Abbildung 1.

Aufgabe 22

Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Dabei gilt $\mathbb{R}_{>0} = \{r \mid r \in \mathbb{R}, r > 0\}$.
Es ist zu zeigen: Es existiert ein Index $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - 0| = \frac{3}{5\,n^2} < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > n_0(\varepsilon).$$

Setze dazu

$$n_0(\varepsilon) = \left\lfloor \sqrt{\frac{3}{5\varepsilon}} \right\rfloor + 1.$$

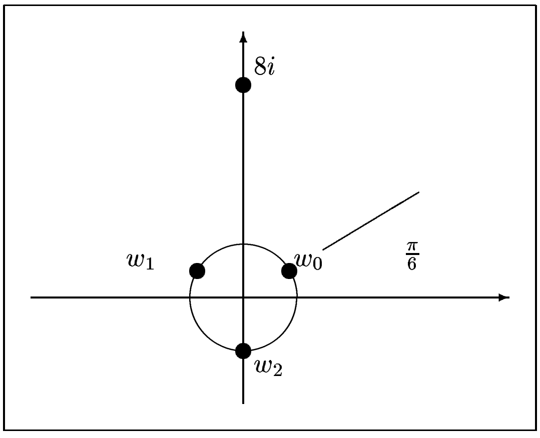

Abbildung 1: Die Zahl $8i$ und deren dritte Wurzeln w_k

Dann ist $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, und für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0(\varepsilon)$ folgt:

$$n \geq \left\lfloor \sqrt{\frac{3}{5\varepsilon}} \right\rfloor + 1 > \sqrt{\frac{3}{5\varepsilon}} > 0.$$

Nach Aufgabe 1d) (Mathematik für Informatiker I) darf man diese Ungleichung quadrieren und erhält

$$n^2 > \frac{3}{5\varepsilon} > 0.$$

Nach Aufgabe 1a) (Mathematik für Informatiker I) darf man zu den inversen Zahlen übergehen und dabei $>$ durch $<$ ersetzen. Dadurch erhält man:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{5\varepsilon}{3}.$$

Nach (1.8) darf man diese Ungleichung mit $\frac{3}{5} > 0$ multiplizieren, ohne dass sich die Ungleichungsrichtung ändert:

$$a_n = \frac{3}{5n^2} < \varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.
Zu $\varepsilon = 10^{-10}$ berechnet man $n_0(\varepsilon)$ zu

$$n_0(\varepsilon) = \left\lfloor \sqrt{\frac{3}{5} \cdot 10^{10}} \right\rfloor + 1 = 77460.$$

Auch jede Zahl größer als 77460 erfüllt die geforderte Eigenschaft.
Zu $\varepsilon = 10^{-5}$ berechnet man $n_0(\varepsilon)$ zu

$$n_0(\varepsilon) = \left\lfloor \sqrt{\frac{3}{5} \cdot 10^{5}} \right\rfloor + 1 = 245.$$

Auch hier erfüllt jede Zahl größer als 245 die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 23

Als Voraussetzung ist bekannt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, und $c \in \mathbb{C}$.
Die Behauptung lautet

$$\lim_{n\to\infty} (c\,a_n) = c\,a.$$

Im Beweis unterscheide man zwei Fälle:

1. Fall: Wenn $c = 0$ gilt, dann ist $(c\,a_n)$ die konstante Folge (0), die nach (15.4c) gegen $0 = 0 \cdot a_n = c\,a_n$ konvergiert.

2. Fall: Es gelte $c \neq 0$. Ferner sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Zu zeigen ist: Es existiert ein $n_0\,(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|c\,a_n - c\,a| < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > n_0\,(\varepsilon)\,.$$

Da $c \neq 0$ ist, ist $|c| > 0$ und folglich gilt $\frac{\varepsilon}{|c|} \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach Voraussetzung existiert $n_0\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right).$$

Dann folgt:

$$|c\,a_n - c\,a| = |c(a_n - a)| = |c|\,|a_n - a| < |c|\,\frac{\varepsilon}{|c|} < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > n_0\,(\varepsilon)\,.$$

Daher setze man $n_0\,(\varepsilon) := n_0\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)$ und es gilt

$$|c\,a_n - c\,a| < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > n_0\,(\varepsilon)\,,$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty}(c\,a_n) = c\,a$.

Aufgabe 24

a) (a) Es gilt

$$a_n = \frac{3n^3 + 2n^2 - 1}{4n^3 - n + 15} = \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}{4 - \frac{1}{n} + \frac{15}{n^3}}.$$

Da $\left(\frac{1}{n}\right)$ eine Nullfolge ist, ist nach Aufgabe 23 $\left(\frac{2}{n}\right)$ auch eine Nullfolge, und nach (15.8b) ist $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ ebenfalls eine Nullfolge. Wegen Aufgabe 23 ist dann $\left(-\frac{1}{n^3}\right)$ auch eine Nullfolge. Die konstante Folge (3) konvergiert gegen 3.

Im Zähler steht also die Summe aus drei konvergenter Folgen. Die Summenfolge ist konvergent mit dem Grenzwert $3 + 0 + 0 = 3$.

Analoge Überlegungen für den Nenner ergeben, dass dieser als Summe von konvergenten Folgen ebenfalls konvergiert. Der Grenzwert ist $4 + 0 + 0 = 4 \neq 0$.

Nach (15.8c) ist die Folge (a_n) konvergent mit dem Grenzwert $\frac{3}{4}$.

(b) Es gilt

$$a_n = \frac{3n^2 - 4n + 2}{4n^3 + n^2 - 13} = \frac{\frac{3}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{4 + \frac{1}{n} - \frac{13}{n^3}}.$$

Wie in a) begründet man: Die Zählerfolge ist konvergent mit Grenzwert 0, die Nennerfolge ist konvergent mit Grenzwert $4 \neq 0$. Nach (15.8c) ist damit (a_n) konvergent mit dem Grenzwert $\frac{0}{4} = 0$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Ausrechnen und Zusammenfassen ergibt zunächst

$$a_n = \frac{2}{n^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{n} + i\right)^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{2i}{n}\sqrt{3} - 1 = \left(\frac{5}{n^2} - 1\right) + \frac{2}{n}\sqrt{3}i.$$

Da $\frac{5}{n^2} \to 0$ gilt, konvergiert der Klammerausdruck gegen -1, und weil $\frac{1}{n} \to 0$ gilt, konvergiert $2\sqrt{3}i \cdot \frac{1}{n}$ gegen 0.

Da (a_n) als Summe zweier konvergenter Folgen geschrieben weerden kann, ist (a_n) selbst konvergent mit dem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

Aufgabe 25

a) Es gilt

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

An dem letzen Term erkennt man, dass höchstens **vier** reelle Multiplikationen benötigt werden. Sind eine oder mehrere der Größen x_1, x_2, y_1 bzw. y_2 gleich 0, so werden weniger Operationen nötig.

b) Es sei $z_2 \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} w := \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + iy_1x_2 - ix_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Für $\mathrm{Re}(w)$ benötigt man **zwei** reelle Multiplikationen im Zähler, **zwei** reelle Multiplikationen im Nenner sowie **eine** Division. Für $\mathrm{Im}(w)$ fallen **zwei** reelle Multiplikationen für den Zähler und **eine** Division an. Der Nenner ist schon bekannt. Dadurch ergeben sich insgesamt höchstens **acht** reelle Multiplikationen und Divisionen.

c) Aus

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$$

folgt

$$(x_1 + y_1)(x_2y_2) - x_1x_2 - y_1y_2 = x_1y_2 + x_2y_1. \tag{1}$$

Für den Realteil von $z_1 \cdot z_2$ werden weiterhin **zwei** reelle Multiplikationen benötigt, allerdings kann man den Imaginärteil wegen der Gleichung (1) durch nur **eine** weitere Multiplikation berechnet werden. Damit benötigt man insgesamt höchstens **drei** reelle Multiplikationen.

d) Es gilt die Gleichung

$$(x_1 + y_1)(x_2 - y_2) - x_1x_2 + y_1y_2 = -x_1y_2 + x_2y_1.$$

Auf Grund dieser Formel braucht man für den Zähler von $\mathrm{Im}(w)$ in b) nur **eine** reelle Multiplikation, womit man insgesamt höchstens **sieben** reelle Multiplikationen oder Divisionen benötigt.

Es sei nun $z_2 \neq 0$. Dann gilt entweder $x_2 \neq 0$ oder $y_2 \neq 0$.

Es gelte im folgenden $x_2 \neq 0$. Der andere Fall ist analog. Dann gilt

$$w := \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 + y_1\left(\frac{y_2}{x_2}\right)}{x_2 + y_2\left(\frac{y_2}{x_2}\right)} + i\frac{y_1 - x_1\left(\frac{y_2}{x_2}\right)}{x_2 + y_2\left(\frac{y_2}{x_2}\right)}.$$

Zu berechnen sind also die Werte $a = \frac{y_2}{x_2}$, y_1a, y_2a und x_1a (**vier** Terme) sowie **zwei** reelle Divisionen. Dies ergibt insgesamt höchstens **sechs** reelle Multiplikationen oder Divisionen.

Aufgabe 26

a) Es gilt $a = (a - b) + b$ sowie $b = (b - a) + a$. Dann folgt:

$$|a| = |(a-b) + b| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a - b| + |b| \Longrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$

und

$$|b| = |(b-a) + a| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |b - a| + |a| \Longrightarrow |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b| \Longrightarrow |a| - |b| \geq -|a - b|\,.$$

Setzt man $r = |a - b| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so gilt

$$-r \leq |a| - |b| \leq r$$

und damit

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq r = |a - b|\,.$$

b) Für $a \in \mathbb{C}$ gilt $|a| = \sqrt{a\overline{a}}$ (nach 14.6a). Dann folgt:

$$|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}\,\overline{\overline{a}}} \overset{(14.5a)}{=} \sqrt{\overline{a}\,a} = |a|\,.$$

Aufgabe 27

a) Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Mit Hilfe von Aufgabe 26a folgt

$$|\,|a_n| - |a|\,| \leq |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Folglich ist $(|a_n|)$ konvergent mit $|a|$ als Grenzwert.

b) Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Mit Aufgabe 26b folgt

$$|\overline{a_n} - \overline{a}| \overset{(14.5b)}{=} |\overline{a_n - a}| = |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Also ist $(\overline{a}_n)$ konvergent mit $\overline{a}$ als Grenzwert.

Aufgabe 28

Nach Aufgabe 23 sind auch die Folgen $(\frac{1}{2}(a_n + b_n))$ und $(\frac{1}{2}(a_n - b_n))$ konvergent mit den Grenzwerten $\frac{1}{2}a$ bzw. $\frac{1}{2}b$.

a) Nach (15.8a) ist die Summenfolge konvergent mit $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ als Grenzwert, also folgt

$$\frac{1}{2}(a_n + b_n) + \frac{1}{2}(a_n - b_n) = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_n = a_n \longrightarrow \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a + b).$$

Demnach ist (a_n) konvergent mit $\frac{1}{2}(a + b)$ als Grenzwert.

b) Die Folge $(-\frac{1}{2}(a_n - b_n))$ ist nach Aufgabe 23 konvergent mit $-\frac{1}{2}b$ als Grenzwert. Nach (15.8a) ist die Summenfolge konvergent mit $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ als Grenzwert. Damit folgt nun:

$$\frac{1}{2}(a_n + b_n) - \frac{1}{2}(a_n - b_n) = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}b_n = b_n \longrightarrow \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a - b).$$

Demnach ist (b_n) konvergent mit $\frac{1}{2}(a - b)$ als Grenzwert.

c) Nach (15.8a) ist das Produkt der beiden konvergenten Folgen (a_n) und (b_n) wieder konvergent mit dem Grenzwert $\frac{1}{4}(a^2 - b^2)$, denn

$$\frac{1}{2}(a + b) \cdot \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{4}(a + b)(a - b) = \frac{1}{4}(a^2 - b^2).$$

Aufgabe 29

a) Es seien $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Die Behauptung lautet nun: $a \leq b$.

Nimm an, dass $a > b$ ist. Dann gilt $\varepsilon := a - b > 0$.

Zu $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$.

Zu $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$.

Für $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gelten dann beide Aussagen gleichzeitig. Insbesondere folgt dann

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_{n_0} - a < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow a - \frac{\varepsilon}{2} < a_{n_0} < a + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{mit} \quad a - \frac{\varepsilon}{2} = a - \frac{a - b}{2} = a - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a + b)$$

und

$$-\frac{\varepsilon}{2} < b_{n_0} - b < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow b - \frac{\varepsilon}{2} < b_{n_0} < b + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{mit} \qquad b + \frac{\varepsilon}{2} = b + \frac{a-b}{2} = b + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a+b).$$

Damit folgt

$$\frac{1}{2}(a+b) < a_{n_0} \overset{\text{Vor.}}{\leq} b_{n_0} < \frac{1}{2}(a+b). \quad \text{WIDERSPRUCH}$$

Also gilt $a \leq b$.

b) Diese Aussage ist **falsch**!

Ein Gegenbeispiel:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad\qquad b_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Dann gilt $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Aufgabe 30

a) Es gilt (siehe Mathematik für Informatiker I)

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx \quad \Longrightarrow \quad x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x.$$

Die Folge $\left(x - \frac{1}{n}\right)$ konvergiert gegen x, da $\left(\frac{1}{n}\right)$ eine Nullfolge ist. Ebenso konvergiert die konstante Folge (x) gegen den Grenzwert x. Nach dem Einschließungsatz (15.12) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x.$$

b) Es gilt

$$a_n = \frac{3^n + 2i}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2i\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Nach (15.10a) erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0.$$

Nach (15.8a) folgt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

c) Für $n \geq 5$ gilt

$$a_n = \underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4}}_{=\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n}$$

sowie

$$\frac{2}{k} < \frac{1}{2}$$

und daher

$$0 < a_n < \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}.$$

Es gilt aber auch für $n \geq 5$ die Folgerung

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)^{n-4} = 0.$$

Mit dem Einschließungssatz (15.12) folgt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aufgabe 31

Es sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Aus $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a \geq 0$ (Aufgabe 29a).
Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben.
Zu zeigen ist: es existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$.

$a = 0$: Dann ist (a_n) eine Nullfolge und es existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq a_n = |a_n| < \varepsilon^2 \text{ für alle } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Dann folgt

$$\sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0(\varepsilon),$$

d.h. $(\sqrt{a_n})$ ist eine Nullfolge.

$a \geq 0$: Durch Erweitern erhält man zunächst

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a} = \frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} = \frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}.$$

Desweiteren gilt

$$\underbrace{\sqrt{a_n}}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{a}}_{> 0} \geq \sqrt{a} > 0 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \cdot \sqrt{a}$ für alle $n \geq n_0$, da $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ist. Nun folgt:

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0,$$

d.h. $\sqrt{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n}$.

Aufgabe 32

a) Durch Einsetzen in die rekursive Definition erhält man:

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = \sqrt{1} = 1 \qquad a_3 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$a_4 = \sqrt{1+\sqrt{2}} \qquad a_5 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}} \qquad a_6 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$$

b) Es wird behauptet, dass $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Der Beweis wird mit vollständiger Induktion geführt:

(IA): Es gilt $a_1 = 0 < 1 = \sqrt{1} = a_2$.

(IV): Es gelte $a_n < a_{n+1}$ für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$.

(IS): Aus der (IV) folgt sofort $1 + a_n < 1 + a_{n+1}$. Daraus wiederum folgt die Ungleichungsbeziehung $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} < \sqrt{1 + a_{n+1}} = a_{n+2}$.

c) Die Behauptung $0 \leq a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wird wieder mit vollständiger Induktion nachgewiesen:

(IA): Es gilt $0 = a_1 < 2$.

(IV): Es gelte $0 \leq a_n < 2$ für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$.

(IS): Aus der (IV) folgt zum einen $0 \leq a_n + 1$. Dann folgt aber auch $0 \leq \sqrt{a_n + 1} = a_{n+1}$. Zum anderen folgt aus der (IV) auch $a_n + 1 < 3$ und damit dann $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} < \sqrt{3} < 2$.

d) Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, ist (a_n) nach (15.16) konvergent. Es sei nun $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 1} \overset{\text{Aufg. 31}}{=\!=} \sqrt{\lim_{n\to\infty}(a_n+1)} = \sqrt{\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + 1} = \sqrt{a+1}.$$

Es gilt also die Folgerungskette

$$a = \sqrt{a+1} \Longrightarrow a^2 = a+1 \Longrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Da $a \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Aufgabe 33

Im weiteren setzen wir

$$\alpha := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \qquad\qquad \beta := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Nach (6.10e) gilt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit berechnet man

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)} = \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}.$$

Wegen $\alpha \neq 0$ und $|\alpha| > |\beta|$ folgt $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$. Wegen (15.10a) folgt damit $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} \to 0$ und auch $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \to 0$. Mit den Grenzwertsätzen (15.8) ergibt sich dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha.$$

Aufgabe 34

a) Es gilt zunächst

$$7^n \leq 3^n + 7^n \leq 7^n + 7^n = 2\cdot 7^n \Longrightarrow 7 \leq \sqrt[n]{3^n + 7^n} \leq 7 \cdot \sqrt[n]{2}.$$

Nach (15.20a) gilt $\sqrt[n]{2} \to 1$ und damit folgt $7 \cdot \sqrt[n]{2} \to 7$. Nach dem Einschließungssatz (15.12) folgt somit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 7$.

b) Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0 \qquad\qquad 1 + \frac{1}{n} \to 1 \neq 0.$$

Mit diesen Beobachtungen folgt

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{(15.8c)} \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

also gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}.$$

Aufgabe 35

a) Es seien $s \in \mathbb{R}$ und $s' \in \mathbb{R}$ Suprema von M. Dann gilt:

$$s = \sup(M), \quad s' \text{ ist obere Schranke von } M \Longrightarrow s \leq s',$$
$$s' = \sup(M), \quad s \text{ ist obere Schranke von } M \Longrightarrow s' \leq s.$$

Zusammen ergibt sich $s = s'$.

b) Es sei $s \in M$ eine obere Schranke. Ist $t \in \mathbb{R}$ eine beliebige obere Schranke von M, so folgt insbesondere $s \leq t$, d.h. s ist die kleinste obere Schranke von M, also $s = \sup(M)$.

c) Es sind hier zwei Beweisrichtungen zu prüfen:

$\Rightarrow$: Es sei $s := \sup(M)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig.
Aus der Annahme $s - \varepsilon \geq x$ für alle $x \in M$ folgt, dass $s - \varepsilon$ eine obere Schranke von M ist mit $s - \varepsilon < s$. Dies ist ein WIDERSPRUCH zu $s = \sup(M)$.
Daher existiert zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $x \in M$ mit $s - \varepsilon < x$.

$\Leftarrow$: Es sei $t \in \mathbb{R}$ eine beliebige obere Schranke von M. Es ist zu zeigen, dass $s \leq t$ gilt.
Unter der Annahme $s > t$ folgt $\varepsilon = s - t > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $x \in M$ mit

$$x > s - \varepsilon = s - (s - t) = t.$$

Daher ist t keine obere Schranke von M. Dies ist ein WIDERSPRUCH zum ersten Satz dieses Beweisteils.
Also ist s die kleinste obere Schranke von M, d.h. $s = \sup(M)$.

d) Die Formulierungen (ohne Beweis) für Infima lauten:

a') M besitzt höchstens ein Infimum.

b') Eine untere Schranke von M, die zu M gehört, ist das Infimum von M.

c') Eine untere Schranke $u \in \mathbb{R}$ von M ist genau dann das Infimum von M, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ mindestens ein $y \in M$ existiert mit $y < u + \varepsilon$.

Aufgabe 36

Es ist zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \text{ ist konvergent.}$$

Da dies eine Reihe mit nicht-negativen reellen Gliedern ist, genügt es nach (16.9) zu zeigen, dass die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Es sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$.

Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absoult konvergent ist, ist auch $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ konvergent. Daher ist die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, d.h. es gibt ein $K > 0$ mit

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es ein $L > 0$ mit

$$b_k \leq L \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt nun:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| = \sum_{i=1}^{k} |a_k| \cdot |b_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot L = L \cdot \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq L \cdot K,$$

d.h. die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt.

Aufgabe 37

a) Bilde die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad\qquad t_n = \sum_{k=10}^{n} a_k \quad (n \geq 10).$$

Da $\sum_{k=10}^{n} a_k$ konvergent ist, ist die Folge $(s_n)_n$ konvergent. Dann ist wegen der Grenzwertsätze auch die Folge $(t_n)_n = s_n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$ konvergent, und es gilt:

$$\sum_{k=10}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - (a_1 + \cdots + a_9)) = \lim_{n\to\infty} s_n - (a_1 + \cdots + a_9) = s - (a_1 + \cdots + a_9),$$

d.h. $\sum_{k=10}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - (a_1 + \cdots + a_9)$.

Allgemein gilt: Für beliebiges $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k.$$

b) Es gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

Wegen $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ konvergent mit dem Grenzwert $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$. Dann berechnet man mit Aufgabenteil a):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k &= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k - \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^1\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 38

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} &= -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = -\ln(2), \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{5^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} - 1 = 5 - 1 = 4 \quad \text{(geom. Reihe).}
\end{aligned}$$

Nach Satz (16.8) ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k = -\ln(2) + i \cdot 4.$$

b) Eine Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right].$$

Damit folgt nun:

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]. \end{aligned}$$

Damit ist (s_n) konvergent, daher ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 39

a) Diese Reihe ist konvergent nach dem Wurzelkriterium (16.16):

$$\sqrt[k]{\frac{2^{k+1}}{k^k}} = \frac{2\cdot\sqrt[k]{2}}{k} \longrightarrow 0 < 1,$$

denn $\sqrt[k]{2} \to 1$ und $\frac{2}{k} \to 0$.

b) Es gilt

$$\frac{k+1}{2k+1} = \frac{1+\frac{1}{k}}{2+\frac{1}{k}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Daher ist $\left((-1)^{k+1}\frac{k+1}{2k+1}\right)$ keine Nullfolge, also ist die Reihe nach (16.3) divergent.

c) Für diese Reihe gilt:

$$k^3+7k^2 = k^2(k+7) \ge k^2(k+2) \Longrightarrow \frac{k+2}{k^3+7k^2} \le \frac{k+2}{k^2(k+2)} = \frac{1}{k^2}.$$

Daher ist $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante zu $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k^3+7k^2}$, weswegen diese Reihe konvergent ist.

d) Diese Reihe ist divergent, denn:

$$k+1 \le k+2 \Longrightarrow \frac{1}{k+1} \ge \frac{1}{k+2},$$

multiplizieren mit $\frac{k+2}{k} > 0$ liefert

$$\frac{k+2}{k(k+1)} \ge \frac{k+2}{k}\cdot\frac{1}{k+2} = \frac{1}{k}.$$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ eine divergente Minorante zur Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$.

Aufgabe 40

Es gilt

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} s_n \text{ mit } s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$$

und

$$\exp(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{z})^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} t_n \text{ mit } t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\overline{z})^k}{k!}.$$

Mit dieser Schreibweise folgt nun

$$\overline{s_n} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} \overset{(14.5\text{ b,c})}{=} \sum_{k=0}^{n} \overline{\left(\frac{1}{k!}\right)}\,\overline{z^k} \overset{(14.5\text{ c})}{=} \sum_{k=0}^{n} \overline{\left(\frac{1}{k!}\right)}\,(\overline{z})^k \overset{\frac{1}{k!}\in\mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,(\overline{z})^k = t_n,$$

also folgt weiter

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{n\to\infty} s_n} \overset{\text{Aufg. 27b}}{=} \lim_{n\to\infty} \overline{s_n} = \lim_{n\to\infty} t_n = \exp(\overline{z}).$$

Aufgabe 41

a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist eine Reihe mit reellen Gliedern, welche die Eigenschaft $|a_k| \geq 0$ erfüllen. Nach Voraussetzung gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ für alle $k \geq k_0$. Nach dem Wurzelkriterium (16.15) ist damit $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent, daher ist nach Definition (16.6) die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

b) Es sei

$$\begin{aligned}
a_k &= \left(\frac{k}{2+i(2k-1)}\right)^k \\
\Longrightarrow |a_k| &= \left(\frac{k}{|2+i(2k-1)|}\right)^k = \left(\frac{k}{\sqrt{4+(2k-1)^2}}\right)^k \\
&= \left(\frac{k}{\sqrt{4+4k^2-4k+1}}\right)^k = \left(\frac{k}{\sqrt{5+4k^2-4k}}\right)^k \\
\Longrightarrow \sqrt[k]{|a_k|} &= \frac{k}{\sqrt{5+4k^2-4k}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{k^2}+4-\frac{4}{k}}} \xrightarrow{\text{Aufg. 31}} \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Nach dem Wurzelkriterium (16.16) ist daher $\sum |a_k|$ konvergent. Daher ist die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergent und damit auch konvergent.

Aufgabe 42

Mit $a_k = b_k = \frac{1}{2^k}$ gilt nach (16.18)

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{2^{k-j}} = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^k} = \frac{k+1}{2^k}.$$

Die konvergente geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, da $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist (dann folgt gerade $|a_k| = a_k$). Nach (16.20) ist das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ wieder absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

Aufgabe 43

a) Die Aussage wird zunächst für alle $n \in \mathbb{N}_0$ per Induktion bewiesen:

(IA) $n = 0$: $\exp(0) = 1 = e^0$ nach (16.21 f).

(IV) Für ein beliebiges (festes) $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $\exp(n) = e^n$.

(IB) $\exp(n+1) = e^{n+1}$.

(IS) $\exp(n+1) \overset{(16.21\text{ e})}{=} \exp(n) \cdot \exp(1) \overset{(\text{IV})}{=} e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$.

b) Es sei nun $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$. Dann kann man n schreiben als $n = -m$, wobei $m \in \mathbb{N}$ eine positive natürliche Zahl ist. Nun folgt:

$$\exp(n) = \exp(-m) \overset{(16.21\text{ f})}{=} \frac{1}{\exp(m)} \overset{\text{a)}}{=} \frac{1}{e^m} = e^{-m} = e^n.$$

c) Es sei nun $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $n > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp(q^n) &\overset{(16.21\text{ f})}{=} \exp(q \cdot n) = \exp(m) \overset{\text{b)}}{=} e^m \ (> 0) \\ \Longrightarrow \exp(q) &= \sqrt[n]{e^m} = e^{\frac{m}{n}} = e^q. \end{aligned}$$

Aufgabe 44

a) Es sei $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 0$ und $\rho = \dfrac{1}{\sigma}$. Für $z = 0$ ist die Reihe absolut konvergent. Es sei daher $z \neq 0$ und $b_k = a_k z^k$. Dann ist $|b_k| \geq 0$, d.h. $\sum |b_k|$ ist eine Reihe mit positiven Gliedern.

Es sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$ gegeben. Nach Berechnung des Quotienten

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \left|\frac{a_{k+1} z^{k+1}}{a_k z^k}\right| = \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \cdot |z| \to \sigma\,|z| < \sigma \cdot \rho = \sigma \cdot \frac{1}{\rho} = 1$$

ist die Reihe $\sum |b_k|$ nach dem Quotientenkriterium (16.14) konvergent, d.h. $\sum a_k z^k$ist für $|z| < \rho$ absolut konvergent.

Nun sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$. Dann gilt

$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \left|\frac{a_{k+1} z^{k+1}}{a_k z^k}\right| = \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| |z| \to \sigma\,|z| > \sigma \cdot \rho = 1,$$

daher ist nach (16.14) die Reihe $\sum a_k z^k$ divergent.

b) Die Berechnung der Konvergenzradien mit Hilfe von a) ergibt folgende Rechnungen:

(a) Es ist $a_k = \frac{1}{k^2+1}$.

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2+1}{(k+1)^2+1} = \frac{k^2+1}{k^2+2k+2} = \frac{1+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2}} \to 1 \Longrightarrow \rho = 1.$$

(b) Hier ist $a_k = \frac{3^k}{k}$.

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{3^{k+1} \cdot k}{(k+1) \cdot 3^k} = 3 \cdot \frac{k}{k+1} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \to 3 \Longrightarrow \rho = \frac{1}{3}.$$