Musterlösung: Mathematik für Informatiker II

Sommersemester 2001

Chr. Nelius/ Th. Pruschke

Blatt 14

Aufgabe 61: Berechne die folgenden unbestimmten Integrale direkt oder mittels Substitution

$$\text{(a)} \int \left(5x^5 + 4x^2 + \sqrt[3]{x} + 2\right) dx\,,\ \text{(b)} \int |x| dx\,,\ \text{(c)} \int \frac{2x}{1+x^2} dx\,,$$

$$\text{(d)} \int x\sqrt{1+x^2}\, dx\,,\ \text{(e)} \int x^2 \sqrt[12]{2+x^3}\, dx\,,\ \text{(f)} \int \sinh(x)\cosh^4(x) dx\,.$$

Lösung:

(a) Es gilt nach Satz 21.4 und Tabelle 21.3b

$$\begin{aligned}\int \left(5x^5 + 4x^2 + \sqrt[3]{x} + 2\right) dx &= 5\int x^5 dx + 4\int x^2 dx + \int x^{1/3} dx + 2\int 1 dx \\ &= \frac{5}{6}x^6 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^{4/3} + 2x + C \\ &= \frac{5}{6}x^6 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}x \cdot \sqrt[3]{x} + 2x + C\,.\end{aligned}$$

(b) Nach Aufgabe 58 ist $F(x) = x \cdot |x|$ differenzierbar, und es ist $F'(x) = 2|x|$. Nach Satz 21.4 gilt dann

$$\int |x| dx = \frac{1}{2}\int F'(x) de = \frac{1}{2}F(x) + C = \frac{1}{2}x|x|\,.$$

(c) Mit der Substitution $t = x^2 + 1$ ergibt sich mit der Tabelle 21.3b

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + C = \ln(x^2+1) + C\,.$$

(d) Mit der Substitution $t = x^2 + 1$ und der Tabelle 21.3b ergibt sich

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{t} dx & &= \frac{1}{2}\int t^{1/2} dt \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2} + C & &= \frac{1}{3}t\sqrt{t} + C \\ &= \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C\,.\end{aligned}$$

(e) Mit der Substitution $t = x^3 + 2$ ergibt sich nach Tabelle 21.3b

$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt[12]{2+x^3}\, dx &= \frac{1}{3}\int \sqrt[12]{t} dt & &= \frac{1}{3}\int t^{1/12} dt \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{13}t^{13/12} + C & &= \frac{4}{13}(x^3+2)\cdot \sqrt[12]{x^3+2} + C\,.\end{aligned}$$

(f) Da der Sinus hyperbolicus die Ableitung von dem Cosinus hyperbolicus ist, folgt mit der Substitution $t = \cosh(x)$

$$\int \sinh(x)\cosh^4(x) dx = \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{5}\cosh^5(x) + C\,.$$

Aufgabe 62: Berechne die folgenden unbestimmten Integrale mit Hilfe partieller Integration

$$\text{(a)} \int x\sinh(x) dx\,,\ \text{(b)} \int (x+1)\cos(x) dx\,,\ \text{(c)} \int x^2 e^x dx\,,\ \text{(d)} \int x\ln(x) dx\,.$$

Lösung:

(a) Mit Hilfe der partiellen Integration (Satz 21.5) mit $f(x) = x$ und $g(x) = \cosh(x)$ folgt

$$\int x\sinh(x)dx = x\cosh(x) - \int \cosh(x)dx = x\cosh(x) - \sinh(x) + C\,.$$

(b) Ebenso gilt mit $f(x) = x$ und $g(x) = \sin(x)$

$$\begin{aligned} \textstyle\int (x+1)\cos(x)dx &= \int x\cos(x)dx + \int \cos(x)dx \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)dx + \sin(x) \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + \sin(x) + C \\ &= (x+1)\sin(x) + \cos(x) + C\,. \end{aligned}$$

(c) Wir wenden die partielle Integration auf $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$ an. Es gilt dann mit dem Beispiel 21.6b

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + C = \big(x^2 - 2x + 2\big)e^x + C\,.$$

(d) Nach Beispiel 21.6a ist $g(x) = x(\ln(x) - 1)$ eine Stammfunktion von $\ln x$, also können wir mit $f(x) = x$ wieder partiell integrieren.

$$\int x\ln(x)dx = x^2\big(\ln(x) - 1\big) - \int x(\ln(x) - 1)dx = x^2\big(\ln(x) - 1/2\big) - \int x\ln(x)dx\,.$$

Dies sieht nicht nach einer Verbesserung aus, dennoch können wir diese Gleichung als eine Gleichung in $\int x\ln(x)dx$ auffassen und erhalten

$$\int x\ln(x)dx = \frac{1}{2}x^2\big(\ln(x) - 1/2\big) + C\,.$$

Alternativ können wir auch $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ benutzen, und es folgt

$$\int x\ln(x)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2\big(\ln(x) - 1/2\big) + C\,.$$

Aufgabe 63: Bestimme die folgenden unbestimmten Integrale mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\text{(a)} \int \frac{1}{x^2 - 4}dx\,,\ \text{(b)} \int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}dx\,,\ \text{(c)} \int \frac{1}{x^2 - 2x + 2}dx\,.$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x+2) - (x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)\,.$$

Damit erhalten wir

$$\int \frac{1}{x^2 - 4}dx = \frac{1}{4}\left(\int \frac{1}{x-2} - \int \frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{4}\big(\ln(|x-2|) - \ln(|x+2|)\big) + C\,.$$

(b) Wir betrachten die rationale Funktion

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$$

und wollen sie als eine Summe einfacherer rationaler Funktionen schreiben, d.h in dieser Summe sollten die Nenner linear oder quadratisch sein, wobei letztere keine Nullstelle haben sollen. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

in den Variablen $A, B, C \in \mathbb{R}$. Durch Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite erhalten wir

$$1 = A \cdot (x^2+1) + (Bx+C) \cdot (x-1) = (A+B)x^2 + (-B+C)x + (A-C) .$$

Da diese Gleichung für unendlich viele $x \in \mathbb{R}$ erfüllt sein soll, gilt nach Koeffizientenvergleich

$$A + B = 0 , \qquad B - C = 0 \quad \text{und} \quad A - C = 1 .$$

Dies ist nun ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung.

$$A = -B = -C = \frac{1}{2} .$$

Wir bekommen also

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} \right) .$$

Für unser Integral ergibt sich nun folgendes:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx &= \frac{1}{2} \cdot \left(\int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x+1}{x^2+1} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \right) . \end{aligned}$$

Wie in 21.11 und nach Aufgabe 61 (c) und Beispiel 21.28 (d) kennen wir diese Integrale, und es gilt

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \cdot \big(\ln(|x-1|) - 1/2 \cdot \ln(x^2+1) - \arctan(x) \big) + C .$$

(c) Für das letzte Integral hilft die Umformung

$$\frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{(x-1)^2+1} ,$$

denn mit der Substitution $t = x - 1$ erhalten wir

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1} dx = \int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan(t) + C = \arctan(x-1) + C .$$

Aufgabe 64: Berechne die bestimmten Integrale

$$\text{(a)} \int_0^{\pi/4} \tan(x) dx , \ \text{(b)} \int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x\right) dx , \ \text{(c)} \int_1^{16} x^{3/2} dx .$$

Lösung:

(a) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung müssen wir eine Stammfunktion von $\tan(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi/4]$ bestimmen, da die Tangensfunktion auf diesem Intervall stetig ist. Dazu betrachten wir

$$\int \tan(x)dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx\,.$$

Da die Ableitung des Cosinus der negative Sinus ist, können wir mit der Substitution $t = \cos(x)$ arbeiten und erhalten

$$-\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{1}{t}dt = -\ln(|t|) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C\,.$$

Damit ist $-\ln(\cos(x))$ eine Stammfunktion von $\tan(x)$, und es ergibt sich für das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)dx = -\ln(\cos(x))\Big|_0^{\pi/4} = -\ln(\cos(\pi/4)) + \ln(1) = -\ln(1/2) = \ln(2)\,.$$

(b) Die Anwendung des Hauptsatzes führt wie in (a) auf die folgende Rechnung

$$\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x\right) dx = \left(4\sqrt{x} - x^2/2\right)\Big|_4^9 = 4\sqrt{9} - 9^2/2 - 4\sqrt{4} + 4^2/2 = 12 - 81/2 - 8 + 8 = 57/2\,.$$

(c) Der Hauptsatz liefert wieder

$$\int_1^{16} x^{3/2}dx = 2/5 \cdot x^2\sqrt{x}\Big|_1^{16} = 2/5 \cdot \left(16^2 \cdot \sqrt{16} - 1\right) = 2/5 \cdot 1023 = 2046/5\,.$$

Aufgabe 65: Bestimme die uneigentlichen Integrale

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{1}{t^2}dt\,,\ \text{(b)} \int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt\,,\ \text{(c)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\,.$$

Lösung:

(a) Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$$

ist an der Stelle $x = 0$ uneigentlich, und es muß die Existenz des folgenden Grenzwerts überprüft werden.

$$\lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to 0+} -\frac{1}{t}\Big|_x^1 = \lim_{x\to 0+} (-1 + \frac{1}{x})\,,$$

da $-1/t$ eine Stammfunktion von $1/t^2$ ist. Wir sehen, daß dieser Grenzwert und damit das uneigentliche Integral nicht existieren.

(b) Diesmal ist das Integral an der „Stelle ∞“ uneigentlich, und wir haben den folgenden Grenzwert zu bestimmen, falls dieser existiert.

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{t}\Big|_1^x = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} + 1 = 1\,.$$

Da dieser Grenzwert existiert, konvergiert unser Integral und hat den Wert 1.

(c) Dieses Integral ist an den Stellen 1 und -1 uneigentlich, deshalb müssen wir folgende Grenzwerte auf Konvergenz überprüfen. Dazu bemerken wir, daß nach 21.10 der Arcus sinus eine Stammfunktion des Integranden ist und berechnen

$$\lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \lim_{x\to 1^-} \arcsin(t)\Big|_0^x = \lim_{x\to 1^-} \big(\arcsin(x) - \arcsin(0)\big) = \pi/2 - 0 = \pi/2\,.$$

Ferner gilt

$$\lim_{x\to(-1)^+} \int_x^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi/2\,,$$

da die Funktion gerade ist. Damit ist unser Integral konvergent und hat den Wert

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + \lim_{x\to(-1)^+} \int_x^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi\,.$$