Übungen zur Darstellungstheorie der S_n

Blatt 6, P. Bürgisser/D. Amelunxen, WS 2006/07

Aufgabe 21 (4 Punkte)
Erstelle eine Isomorphieliste irreduzibler D_n-Moduln, wobei D_n wie üblich die n-te Diedergruppe bezeichne, für n gerade.

Aufgabe 22 (8 Punkte)
Sei $D : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe G und $\phi, \psi \in \mathbb{C}^G$. Definiere die *Fourier-Transformierte* $\widehat{\phi}(D) \in \mathrm{End}(V)$ via

$$\widehat{\phi}(D) \;:=\; \sum_{g\in G} \phi(g) \cdot D(g) \; .$$

(1) Zeige, dass für $\phi * \psi \in \mathbb{C}^G$, $(\phi * \psi)(g) := \sum_{h\in G} \phi(h) \cdot \psi(h^{-1}g)$ gilt:

$$\widehat{\phi * \psi}(D) \;=\; \widehat{\phi}(D) \cdot \widehat{\psi}(D) \; .$$

(2) Sei $W_1, \ldots, W_k$ eine Liste der irreduziblen G-Moduln, $D_1, \ldots, D_k$ die entsprechenden Darstellungen und $\chi_1, \ldots, \chi_k$ die entsprechenden Charaktere. Zeige die *Fourier-Inversionsformel*

$$\phi(g) \;=\; \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \dim(W_i) \cdot \mathrm{tr}\left(D_i(g^{-1}) \cdot \widehat{\phi}(D_i) \right) \; ,$$

(Tipp: Benutze den Charakter der regulären Darstellung)

(3) und entwickle aus ihr die *Plancherel-Formel* für $\phi, \psi \in \mathbb{C}^G$:

$$\sum_{g\in G} \phi(g^{-1})\psi(g) \;=\; \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \dim(W_i) \cdot \mathrm{tr}\left(\widehat{\phi}(D_i) \cdot \widehat{\psi}(D_i) \right) \; .$$

(4) Interpretiere die Formeln der letzten Teilaufgaben für $G = C_n = \langle \zeta \rangle$ mit $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Aufgabe 23 (6 Punkte)
Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe vom Index 2.

(1) Zeige, dass für jede Konjugationsklasse K von G mit $K \cap H =: K' \neq \emptyset$ gilt: Entweder ist K' eine Konjugationsklasse in H, oder K' ist die Vereinigung von zwei Konjugationsklassen der gleichen Größe in H. Zeige außerdem, dass K' genau dann eine Konjugationsklasse in H ist, wenn es ein $k \in K$ und ein $g \notin H$ gibt, so dass $gk = kg$.

(2) Sei χ ein irreduzibler Charakter von G. Zeige, dass $\chi\downarrow_H$ entweder irreduzibel oder die direkte Summe von zwei irreduziblen Charakteren ist. Zeige außerdem, dass $\chi\downarrow_H$ genau dann irreduzibel ist, wenn $\chi(g) \neq 0$ für ein $g \notin H$.

(3) Betrachte den Spezialfall $G = S_n$ und $H = A_n$. Beweise, dass eine Permutation $\pi \in S_n$ vom Zykeltyp $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ genau dann in A_n liegt, wenn $n - l$ gerade ist, und zeige, dass eine Konjugationsklasse von S_n genau dann in A_n zerfällt, wenn alle Summanden der entsprechenden Partition von n ungerade und verschieden sind.

Abgabe: Mi 29.11.2006 bis 11:00 Uhr im Kasten auf der Ebene D1.