Übungsblatt 9

Aufgabe 14: (Implementierungsaufgabe) (15)

Implementiere die eingebetteten Verfahren RK-Fehlberg (4)5 (Beispiel 2.65 der Vorlesung)

$$
\begin{array}{c|cccccc l}
0 & 0 & & & & & & \leftarrow\ k_1 = h\,f(y) \\
\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 & & & & & \leftarrow\ k_2 = h\,f(y+\frac{2}{9}\,k_1) \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 & & & & \quad\vdots \\
\frac{3}{4} & \frac{69}{128} & -\frac{243}{128} & \frac{135}{64} & 0 & & & \quad\vdots \\
1 & -\frac{17}{12} & \frac{27}{4} & -\frac{27}{5} & \frac{16}{15} & 0 & & \quad\vdots \\
\frac{5}{6} & \frac{65}{432} & -\frac{5}{16} & \frac{13}{16} & \frac{4}{27} & \frac{5}{144} & 0 & \leftarrow\ k_6 = h\,f(y+\frac{65}{432}\,k_1+\cdots) \\
\hline
 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{9}{20} & \frac{16}{45} & \frac{1}{12} & 0 & \leftarrow\ b^T \quad \text{(Ordnung 4, 5 Stufen)} \\
 & \frac{47}{450} & 0 & \frac{12}{25} & \frac{32}{225} & \frac{1}{30} & \frac{6}{25} & \leftarrow\ \hat{b}^T \quad \text{(Ordnung 5, 6 Stufen)} \\
 & -\frac{1}{150} & 0 & \frac{3}{100} & -\frac{16}{75} & -\frac{1}{20} & \frac{6}{25} & \leftarrow\ \hat{b}^T - b^T \quad \text{(Fehlerschätzer)}
\end{array}
$$

für das ebene Kepler-Problem

$$
\frac{d}{dt}\,y \;=\; \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -x_1/\|x\|_2^3 \\ -x_2/\|x\|_2^3 \end{pmatrix}, \quad y(0) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}
$$

aus den Aufgaben 9 und 10. Implementiere die aus der Fehlerschätzung resultierende automatische Schrittweitensteuerung. Starte mit $h = 1$, akzeptiere eine Schrittweite, wenn für den Schätzwert $E(y,h)$ des lokalen Fehlers

$$
0.1\ \texttt{eps} < \|E(y,h)\|_2 < 10\ \texttt{eps} \quad \text{mit} \quad \texttt{eps} = 10^{-10}
$$

gilt. Implementiere wahlweise das Ergebnis des Verfahrens 4.ter bzw. 5.ter Ordnung zur Definition des Zeitschrittes. Zähle die Anzahl der Funktionsauswertungen.

Führe einen Umlauf für

$p = 1.0$ (kreisförmig) , $p = 0.01$ (exzentrisch) und $p = 0.0001$ (sehr exzentrisch)

durch, wobei für $t + h > T$ (h=`momentane Schrittweite`) ein letzter Zeitschritt mit $h := T - t$ benutzt wird, um einen Stützwert zum Zeitpunkt T zu erhalten. Verwende dabei

a) das schrittweitengesteuerte "klassische" RK-Verfahren 4.ter Ordnung aus Aufgabe 10.b),

b) das RK-Fehlberg-Verfahren 4.ter Ordnung und

c) das RK-Fehlberg-Verfahren 5.ter Ordnung.

Vergleiche $\|y(T) - y(0)\|_2$ nach einem numerischen Umlauf, beachte die jeweils benötigte Anzahl der Vektorfeldauswertungen.

ABGABE: Montag 10. 2. 97 (Übung)