NUMERIK IIb — Wintersemester 96/97

DR. WALTER OEVEL — 17. Jan. 1997

Übungsblatt 8

Aufgabe 11: (Konstruktion von RK-Verfahren, Ordnungsgleichungen)

a) Bestimme das eindeutige 1-stufige RK-Verfahren der Ordnung 2. Zeige, daß es äquivalent zur impliziten Mittelpunktsregel $Y = I_h(y)$ mit

$$Y = y + h\,f\Big(\frac{1}{2}(y+Y)\Big)$$

aus Aufgabe 6.c) ist. (2)

b) Finde alle expliziten 3-stufigen RK-Verfahren $\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & 0 \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$ der Ordnung 3. Vergleiche für $(c_2, c_3) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{2}, 1), (1, \frac{1}{2})$ mit der Liste 2.62 der Vorlesung. (6)

Anleitung: 4 Ordnungsgleichungen für die 6 Parameter $a_{21}, a_{31}, a_{32}, b_1, b_2, b_3$ sind zu lösen. Verwende c_2, c_3 als Parameter für die Lösungsschar (ignoriere die Spezialfälle $c_2 c_3 = 0$, $c_2 = c_3$ und $c_2 = 2/3$).

Aufgabe 12: (Zur Inversen von RK-Abbildungen)

Zu einem s-stufigen RK-Verfahren I_h mit dem Butcher-Schema $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$ definiert man das "gespiegelte" s-stufige Verfahren I_h^* mit den Parametern

$$a^*_{ij} \;=\; b_j - a_{ij}\;, \quad b^*_j \;=\; b_j\;, \quad i = 1, \ldots, s\;.$$

Zeige, daß diese Spiegelung die Inverse liefert: $I^*_{-h} \circ I_h = id$. (3)

Anleitung: zeige, daß das Gleichungssystem für die Zwischenstufen y_i^* des Schrittes $I_h(y) \to I^*_{-h}(I_h(y))$ durch $y_i^* = y_i$ gelöst wird, wo y_i die Zwischenstufen des Schrittes $y \to I_h(y)$ sind.

Aufgabe 13: (RK-Verfahren für lineare Systeme: die Stabilitätsfunktion)

Betrachte das s-stufige Runge-Kutta-Verfahren

$$I_h(y) \;=\; y \;+\; h \sum_{i=1}^{s} b_j\, f(y_j)\;, \quad y_i \;=\; y \;+\; h \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\, f(y_j)\;, \quad i = 1, \ldots, s$$

für das "skalare Testproblem" $dy/dt = f(y) = \lambda\, y$, $y(t), \lambda \in \mathbb{C}$. Zeige, daß die Abbildung $y \to I_h(y)$ durch Multiplikation mit der Zahl

$$p(z) \;=\; 1 + z\,\langle b, (\mathbb{1} - z\,A)^{-1} e\,\rangle\;, \quad z = \lambda\, h$$

gegeben ist, wo $b = (b_1, \ldots, b_s)^T$, $A = (a_{ij})$ und $e = (1, \ldots, 1)^T$. Warum ist $p(z)$ bei expliziten Verfahren ein Polynom? (2)

ABGABE: Montag 27. 1. 97 (Übung)