NUMERIK IIB
DR. WALTER OEVEL

WINTERSEMESTER 96/97
10. JAN. 1997

Übungsblatt 7

Aufgabe 10: (Implementierungsaufgabe)
Implementiere das "klassische Runge-Kutta-Verfahren" 4.ter Ordnung

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

für das ebene Kepler-Problem

$$\frac{d}{dt}\, y \;=\; \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -x_1/\|x\|_2^3 \\ -x_2/\|x\|_2^3 \end{pmatrix}, \quad y(0) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 9.

a) Führe numerisch einen Umlauf für $p = 0.90$ (kreisähnliche Bahn) bzw. $p = 0.01$ (exzentrische Bahn) durch. Benutze dabei die konstante Schrittweite

$$h = T/10 \quad \text{bzw.} \quad h = T/100 \quad \text{bzw.} \quad h = T/1000 \quad \text{bzw.} \quad h = T/10000$$

mit der Umlaufszeit T nach Aufgabe 9d/e. Als Ausgabe benutze

$$\|y(T) - y(0)\|_2 \;, \quad H(y(T)) - H(y(0)), \quad L(y(T)) - L(y(0)) \;,$$

wobei H und L die Energie bzw. der Drehimpuls ist. Zähle die Anzahl der durchgeführten Auswertungen des Vektorfeldes. (6)

b) Implementiere die automatische Schrittweitensteuerung 2.41 der Vorlesung. Starte mit $h = 1$, akzeptiere eine Schrittweite, wenn für den Schätzwert $E(y, h)$ des lokalen Fehlers

$$0.1\ \texttt{eps} < \|E(y,h)\|_2 < 10\ \texttt{eps}$$

gilt. Führe wie in a) einen Umlauf für $p = 0.90$ bzw. $p = 0.01$ mit `eps`$=10^{-5}$ bzw. `eps`$=10^{-10}$ durch, wobei für $t + h > T$ (h=`momentane Schrittweite`) ein letzter Zeitschritt mit $h := T - t$ benutzt wird, um einen Stützwert zum Zeitpunkt T zu erhalten. Drucke dabei alle bei einem Schrittweitenwechsel gefundenen Schrittweiten aus, zähle die Anzahl der Vektorfeldauswertungen. (9)

ABGABE: Montag 20. 1. 97 (Übung)