NUMERIK IIB Wintersemester 96/97
DR. WALTER OEVEL 13. Dez. 1996

Übungsblatt 6

Mit der folgenden Aufgabe wird ein analytisch lösbares ("integrables") dynamisches System diskutiert, das später als Testproblem für numerische Integration eingesetzt werden soll.

Aufgabe 9: (Das ebene Kepler-Problem)
Die Bewegung $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$ eines um eine im Ursprung sitzende Sonne laufenden Planeten wird durch das Newtonsche Gravitationsgesetz (nach Skalierung)

$$\frac{d^2}{dt^2}\,x \;=\; -\,\frac{1}{r^3}\,x \qquad \text{mit} \quad r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

bestimmt. Als dynamisches System:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -x_1/r^3 \\ -x_2/r^3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige: die "Energie" $E = (p_1^2 + p_2^2)/2 - 1/r$ und der "Drehimpuls" $L = x_1 p_2 - x_2 p_1$ sind Erhaltungsgrößen: $dE/dt = dL/dt = 0$. (2)

b) Zeige: mit Polarkoordinaten $x_1 = r\,\cos(\phi)$, $x_2 = r\,\sin(\phi)$ gilt

$$\frac{d\phi}{dt} \;=\; \frac{L}{r^2}\,, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \;=\; 2\,E + \frac{2}{r} - \frac{L^2}{r^2}\,. \tag{3}$$

c) Folgere, daß sich für $E < 0$ beschränkte Bahnen (diese sind –ohne Beweis– Ellipsen) ergeben. Zeige, daß die extremalen Radien (Halbachsen) $r_\pm$ eines Umlaufs durch

$$r_\pm = \frac{1}{2\,(-E)}\left(1 \pm \sqrt{1 + 2\,E\,L^2}\,\right) \tag{3}$$

gegeben sind.

d) Zeige, daß die Umlaufszeit durch $T = \dfrac{\pi}{\sqrt{-2\,E^3}}$ gegeben ist. (5)

Anleitung: mit b) gilt $dr/dt = \sqrt{2E + 2/r - L^2/r^2} = \sqrt{-\,2\,E}\;\sqrt{(r_+ - r)(r - r_-)}\,/\,r$. Es folgt $T/2 = \int_{r_-}^{r_+} dr/(dr/dt)$ mit dem Standardintegral

$$\int_{r_-}^{r_+} \frac{r\,dr}{\sqrt{(r_+ - r)(r - r_-)}} \;=\; \frac{\pi}{2}\,(r_- + r_+)\,.$$

e) Betrachte die Anwangswerte $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, p_1(0) = 0, p_2(0) = p$. Bestimme die Halbachsen und die Umlaufszeit als Funktion von p. (1)

Für welche Werte ergeben sich beschränkte Bahnen, wann ergibt sich eine Kreisbahn?

ABGABE: Freitag 20. 12. 96 (Vorlesung) oder Montag 6. 1. 97 (Übung)