Numerik IIb
Dr. Walter Oevel

Wintersemester 96/97
6. Dez. 1996

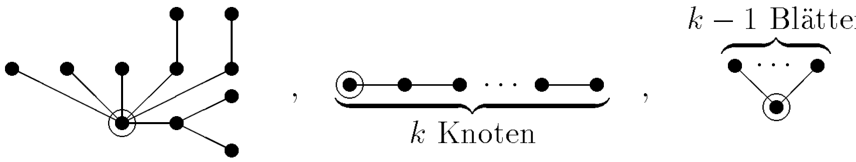
Übungsblatt 5

Aufgabe 7: (Zur Kombinatorik von gewurzelten Bäumen)

a) Finde eine rekursive Darstellung der Anzahl monotoner Numerierungen α mittels der α-Werte von Teilbäumen:

$$\alpha([\![\ \rho\tau_1^{m_1}\cdots\rho\tau_k^{m_k}\ ]\!]) \ = Formel\Big(\alpha(\rho\tau_1),\cdots,\alpha(\rho\tau_k)\Big)\ . \qquad (4)$$

b) Berechne α für



. (3)

Aufgabe 8: (Zum Runge-Kutta-Gewicht)
Eine $s\times s$-Matrix $A=(a_{ij})$ und ein Vektor $b=(b_1,\ldots,b_s)^T$ seien vorgegeben. Für einen gewurzelten Baum $\rho\tau$ definiere die **RK-Gewichte**

$$\Phi(\rho\tau)=\sum_{j_1=1}^{s}\cdots\sum_{j_n=1}^{s} b_{j_r}\prod_{(\alpha,\beta)\in E} a_{j_\alpha j_\beta}$$

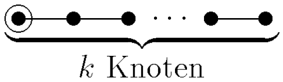
und
$$\Phi_i(\rho\tau)=\sum_{j_1=1}^{s}\cdots\sum_{j_n=1}^{s} a_{ij_r}\prod_{(\alpha,\beta)\in E} a_{j_\alpha j_\beta}\ ,\quad i=1,\ldots,s$$

mittels des numerierten Repräsentanten $\lambda\rho\tau=(V,E,r)\in\rho\tau$ mit $V=\{1,\ldots,n\}$. Anschaulich: jeder Kante wird eine Kopie von A, der Wurzel wird der Vektor b (bzw. bei Φ_i eine weitere Kopie von A) angeheftet, dann multipliziere alles und addiere.

a) Zeige:
$$\Phi([\![\ \rho\tau_1\cdots\rho\tau_k\ ]\!])=\sum_{j=1}^{s} b_j\Phi_j(\rho\tau_1)\cdots\Phi_j(\rho\tau_k)$$

und
$$\Phi_i([\![\ \rho\tau_1\cdots\rho\tau_k\ ]\!])=\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\Phi_j(\rho\tau_1)\cdots\Phi_j(\rho\tau_k)\ ,\quad i=1,\ldots,s\ . \qquad (4)$$

b) Zeige:

$\Phi\Big($ 

$\Big) = \langle b, A^{k-1}e\rangle$ (2)

mit $e=(1,\ldots,1)^T$ und dem üblichen Skalarprodukt $\langle .,.\rangle$ auf dem $\mathbb{R}^s$.

Abgabe: Freitag 13. 12. (Vorlesung) oder Montag 16. 12. (Übung)