NUMERIK IIB Wintersemester 96/97
DR. WALTER OEVEL 29. Nov. 1996

Übungsblatt 4

Aufgabe 6: (Einige Verfahren und ihre Ordnungen)
Die **Ordnung** eines Integrators I_h für $dy/dt = f(y)$ ist die höchste h-Potenz, in der die Taylor-Entwicklung von $I_h(y)$ (bzgl. h bei fixiertem y) mit derjenigen des Flusses $F_h(y)$ übereinstimmt.

a) Bestimme die Parameter $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ in

$$I_h(y) = y + h\, b_1\, f(y) + h\, b_2\, f(\ y + h\, a\, f(y)\ )$$

so, daß I_h von möglichst hoher Ordnung ist. (4)

b) Das implizite Euler-Verfahren ist $I_h(y) = Y$, wobei Y die Lösung von

$$Y = y + h\, f(Y) \qquad (\#)$$

ist. Zeige, daß für Lipschitz-stetiges f eine eindeutige Lösung $Y = Y(h, y)$ existiert, wenn nur h hinreichend klein ist (Anleitung: Banachscher Fixpunktsatz). Berechne die ersten Terme der Taylor-Entwicklung von I_h und bestimme die Ordnung. (5)

Anleitung: Ansatz $Y(h, y) = y + h\, A(y) + h^2\, B(y) + \cdots$. Vergleiche die h-Ordnungen in (#), um rekursiv $A, B, \ldots$ zu bestimmen.

c) Die "implizite Mittelpunktsregel" ist $I_h(y) = Y$, wobei Y die Lösung von

$$Y = y + h\, f\Big(\frac{1}{2}(y + Y)\Big)$$

ist. Bearbeite b) für dieses Verfahren. (6)

ABGABE: Freitag 6. 12. (Vorlesung) oder Montag 9. 12. (Übung)