NUMERIK IIb
DR. WALTER OEVEL

Wintersemester 96/97
15. Nov. 1996

Ü b u n g s b l a t t 2

Aufgabe 2: (Taylor-Entwicklung der exakten Lösung)
Bestimme die ersten 5 Terme der Taylor-Entwicklung

$$y(t_0+h) = y_0 + h\, f(y_0) + \frac{h^2}{2!}\,(..?..) + \frac{h^3}{3!}\,(..?..) + \frac{h^4}{4!}\,(..?..) + \frac{h^5}{5!}\,(..?..) + \cdots$$

der exakten Lösung des AWP $dy/dt = f(y)$, $y(t_0) = 0$, $y \in \mathbb{R}$. (3)

Aufgabe 3: (Das Euler-Verfahren)
Betrachte das lineare System $dy/dt = f(y) = Ay$ auf dem $\mathbb{R}^N$ mit einer konstanten Matrix A. Es sei $I_h : \; y_0 \; \to y_0 + h\, f(y_0)$ das Euler-Verfahren mit Schrittweite h.

a) Bestimme $(I_h)^n = \underbrace{I_h \circ \cdots \circ I_h}_{n}$. (1)

b) Zu fixiertem t wähle Schrittweiten $h = h(n) = t/n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zeige: für die numerische Lösung $y_n = (I_{h(n)})^n(y_0)$ ($\approx y(nh) = y(t) =$ exakte Lösung) zum Anfangswert y_0 gilt (2)

$$\lim_{n\to\infty} (y(t) - y_n) = 0 \qquad \text{für alle Startwerte } y(0) = y_0.$$

c) Betrachte ein System auf dem $\mathbb{R}^2$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -1\,000\,000$ und $\lambda_2 = 1$ von A. Für <u>fixiertes</u> h betrachte die numerische Lösung $y_n = (I_h)^n(y_0)$.

Zeige: $\quad y(t) = e^{\lambda_1 t}\, a + e^{\lambda_2 t}\, b \;, \quad y_n = (1+\lambda_1 h)^n\, a + (1+\lambda_2 h)^n\, b$ (3)
mit denselben Konstanten $a, b \in \mathbb{R}^2$ (wie ergeben sich diese aus y_0?).

i) Sei $h\lambda_2 \ll 1$. Für wieviele Zeitschritte n approximiert $(1+h\lambda_2)^n$ den Wert $e^{\lambda_2 t}$, $t = nh$, bis auf eine vorgegebene relative Genauigkeit $\epsilon \ll 1$? Betrachte speziell $h = 10^{-5}$, $\epsilon = 10^{-4}$. (3)

ii) Diskutiere den Fall von Schrittweiten $-2/\lambda_1 < h \ll 1/\lambda_2$. Was passiert mit dem von λ_1 erzeugten numerischen Lösungszweig (der in der exakten Lösung schon nach kurzer Zeit abgeklungen ist)? Betrachte speziell $h = 10^{-5}$ und $n = 10$. (2)

Anleitung: Diagonalisierung $A = T^{-1}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)\, T$.

ABGABE: Freitag, 22. 11, Beginn der Vorlesung