Musterlösung Aufgabe 28

Aufgabe 28: (QR-Zerlegung von 3-Band-Matrizen, technische Durchführung)

Sei $$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & 0 \\ \alpha_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & & \alpha_{n-1} & \beta_n \end{pmatrix}.$$

a) Zeige induktiv

$$A^{(j)} := H^{(j-1)} \cdots H^{(1)} A = \left(\begin{array}{cccc|cc|ccc} u_1 & v_1 & w_1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & u_{j-1} & v_{j-1} & w_{j-1} & & & \\ \hline & & & & \tilde{\beta}_j & \tilde{\gamma}_j & 0 & & \\ & & & & \alpha_j & \beta_{j+1} & \gamma_{j+1} & & \\ \hline & & & & 0 & \alpha_{j+1} & \beta_{j+2} & \gamma_{j+2} & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right),$$

wobei rekursiv

$$H^{(j)} = \left(\begin{array}{c|cc|c} \mathbb{1} & & & \\ \hline & c_j & s_j & \\ & s_j & -c_j & \\ \hline & & & \mathbb{1} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow j \\ \leftarrow j+1 \\ \\ \end{array} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} c_j &= \tilde{\beta}_j \,/\, \sqrt{\tilde{\beta}_j^2 + \alpha_j^2} \\ s_j &= \alpha_j \,/\, \sqrt{\tilde{\beta}_j^2 + \alpha_j^2} \end{aligned}$$

(bzw. $c_j = 1$, $s_j = 0$ für $\alpha_j = 0$) gewählt wird. Gestartet wird mit $A^{(1)} := A$, d.h., $\tilde{\beta}_1 := \beta_1$, $\tilde{\gamma}_1 := \gamma_1$. Anleitung: $H^{(j)}$ wirkt nur auf die Zeilen j und $j+1$ des Schemas.

Zeige, daß $H^{(j)}$ orthogonal ist.

Anmerkung: es braucht nicht verifiziert zu werden, daß $H^{(j)}$ der Householder-Konstruktion aus der Vorlesung entspricht (was –bis auf Vorzeichen– in der Tat der Fall ist).

b) Leite aus a) eine Rekursion zur Berechnung der 3 Bänder von

$$R = H^{(n-1)} \cdots H^{(1)} A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & w_{n-2} \\ & & & \ddots & v_{n-1} \\ 0 & & & & u_n \end{pmatrix}$$

her. Benutze dabei die Daten c_j, s_j der Matrizen $H^{(j)}$. Mit welchem Aufwand wird R ermittelt? Implementiere die Rekursion und gebe diese Daten für $(\alpha_i) = (-3, -2, \ldots, 5)$, $(\beta_i) = (1, 2, \ldots, 10)$, $(\gamma_i) = (1, 2, \ldots, 9)$ an.

c) Die Daten c_j, s_j der Householder-Matrizen aus a) liegen vor. Wie und mit welchem Aufwand berechnet sich die Transformation $Q^T\vec{b} = H^{(n-1)}\cdots H^{(1)}\vec{b}$ eines beliebigen Vektors $\vec{b}$?

d) Zeige $Q^T = H^{(n-1)}\cdots H^{(1)} = \begin{pmatrix} * & * & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$.

Anleitung:

$$H^{(j-1)}\cdots H^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} * & * & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ * & \dots & * & * & 0 & \\ \hline * & \dots & * & * & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & & \mathbb{1} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Musterlösung: a) Induktion nach j. Für $j = 1$ ist nichts zu zeigen. Schritt $j-1 \to j$: sei $H^{(j-1)}\cdots H^{(1)}A$ von der angegebenen Form, wähle $H^{(j)}$ wie angegeben. Da $H^{(j)}$ nur auf die Zeilen j und $j+1$ des Zwischenschemas $H^{(j-1)}\cdots H^{(1)}A$ wirkt, bleiben alle Zeilen außer $j, j+1$ in der angegebenen behaupteten Form. Die Zeilen j und $j+1$ von $H^{(j)}\cdots H^{(1)}A$ berechnen sich zu

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} c_j & s_j \\ s_j & -c_j \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc|ccc} \dots & 0 & \tilde{\beta}_j & \tilde{\gamma}_j & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \alpha_j & \beta_{j+1} & \gamma_{j+1} & 0 & \dots \end{array}\right) \\ = &\left(\begin{array}{cc|cc|ccc} \dots & 0 & c_j\tilde{\beta}_j + s_j\alpha_j & c_j\tilde{\gamma}_j + s_j\beta_{j+1} & s_j\gamma_{j+1} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & s_j\tilde{\beta}_j - c_j\alpha_j & s_j\tilde{\gamma}_j - c_j\beta_{j+1} & -c_j\gamma_{j+1} & 0 & \dots \end{array}\right) \\ =: &\left(\begin{array}{cc|cc|ccc} \dots & 0 & u_j & v_j & w_j & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \tilde{\beta}_{j+1} & \tilde{\gamma}_{j+1} & 0 & \dots \end{array}\right) . \end{aligned}$$

Hierbei ist entscheidend, daß mit

$$c_j = \tilde{\beta}_j \,/\, \sqrt{\tilde{\beta}_j^2 + \alpha_j^2}\ , \quad s_j = \alpha_j \,/\, \sqrt{\tilde{\beta}_j^2 + \alpha_j^2} \tag{1}$$

das Element α_j eliminiert wird: $\quad s_j\tilde{\beta}_j - c_j\alpha_j = \dfrac{\alpha_j\tilde{\beta}_j}{\sqrt{\tilde{\beta}_j^2 + \alpha_j^2}} - \dfrac{\tilde{\beta}_j\alpha_j}{\sqrt{\tilde{\beta}_j^2 + \alpha_j^2}} = 0$.

Dies beweist die in a) behauptete Form der Zwischenschemata $A^{(j)} = H^{(j-1)}\cdots H^{(1)}A$. Zusätzlich ergibt sich die Rekursion

$$\begin{gathered} u_j = c_j\tilde{\beta}_j + s_j\alpha_j\ , \quad v_j = c_j\tilde{\gamma}_j + s_j\beta_{j+1}\ , \quad w_j = s_j\gamma_{j+1}\ , \\ \tilde{\beta}_{j+1} = s_j\tilde{\gamma}_j - c_j\beta_{j+1}\ , \quad \tilde{\gamma}_{j+1} = -c_j\gamma_{j+1}\ . \end{gathered} \tag{2}$$

Falls $\alpha_j = 0$ gilt, so braucht dieses Element nicht mehr eliminiert zu werden. Man kann in diesem Fall $c_j = 1$, $s_j = 0$ setzen. In jedem Fall ist $H^{(j)}$ orthogonal:

$$H^{(j)}(H^{(j)})^T = \begin{pmatrix} c_j & s_j \\ s_j & -c_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j & s_j \\ s_j & -c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_j^2 + s_j^2 & 0 \\ 0 & s_j^2 + c_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

b) Aus (1) und (2) ergibt sich die definierende Rekursion von u_j, v_j, w_j, $j = 1, \ldots, n-2$. Im letzten Schritt $j = n-1$ kann man die nicht existenten w_{n-1} und $\tilde{\gamma}_n$ vergessen. Es gilt $\tilde{\beta}_n = u_n$. Speichert man $\tilde{\beta}_j$ als β_j und $\tilde{\gamma}_j$ als γ_j, so ergibt sich folgende Pseudo-Implementierung:

for $j = 1 \,..\, n-2$ **do begin**
  if $\alpha_j = 0$
    then $c_j := 1\,;\; s_j := 0\,;$
    else $t := \sqrt{\beta_j^2 + \alpha_j^2}\,;\; c_j := \beta_j / t\,;\; s_j := \alpha_j / t\,;$
  end_if;
  $u_j := c_j\beta_j + s_j\alpha_j\,;$
  $v_j := c_j\gamma_j + s_j\beta_{j+1}\,;$
  $w_j := s_j\gamma_{j+1}\,;$
  $\beta_{j+1} := s_j\gamma_j - c_j\beta_{j+1}\,;$
  $\gamma_{j+1} = -c_j\gamma_{j+1}\,;$
end_for;
if $\alpha_{n-1} = 0$ (∗ letzter Schritt $j = n-1$: ∗)
  then $c_{n-1} := 1\,;\; s_{n-1} := 0\,;$
  else $t := \sqrt{\beta_{n-1}^2 + \alpha_{n-1}^2}\,;\; c_{n-1} := \beta_{n-1}/t\,;\; s_{n-1} := \alpha_{n-1}/t\,;$
end_if;
$u_{n-1} := c_{n-1}\beta_{n-1} + s_{n-1}\alpha_{n-1}\,;$
$v_{n-1} := c_{n-1}\gamma_{n-1} + s_{n-1}\beta_n\,;$
$u_n := s_{n-1}\gamma_{n-1} - c_{n-1}\beta_n\,;$

Rechenaufwand: $12\,(n-2) + 10 = 12\,n - 2$ Multiplikationen, $5\,(n-2) + 4 = 5\,n + 6$ Additionen, $n-1$ Wurzeln.

```
    |\^/|     Maple V Release 4 (Universitaet GH Paderborn)
._|\|   |/|_. Copyright (c) 1981-1996 by Waterloo Maple Inc. All rights
 \  MAPLE  /  reserved. Maple and Maple V are registered trademarks of
 <____ ____>  Waterloo Maple Inc.
      |       Type ? for help.
```

```
> n:=10:
> for i to n do beta[i]:=1.0*i: od:
> for i to n-1 do alpha[i]:=1.0*(i-4): od:
> for i to n-1 do Gamma[i]:=1.0*i: od:
> ...
> print(A):
      [ 1.0  1.0   0     0    0    0    0    0    0    0  ]
      [-3.0  2.0  2.0    0    0    0    0    0    0    0  ]
      [  0  -2.0  3.0   3.0   0    0    0    0    0    0  ]
      [  0    0  -1.0   4.0  4.0   0    0    0    0    0  ]
      [  0    0    0     0   5.0  5.0   0    0    0    0  ]
      [  0    0    0     0   1.0  6.0  6.0   0    0    0  ]
      [  0    0    0     0    0   2.0  7.0  7.0   0    0  ]
      [  0    0    0     0    0    0   3.0  8.0  8.0   0  ]
      [  0    0    0     0    0    0    0   4.0  9.0  9.0 ]
      [  0    0    0     0    0    0    0    0   5.0 10.0 ]

> print(R);
 [3.162277660 , -1.581138830 , -1.897366596 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
 [0 , 2.549509757 , -1.961161352 , -2.353393622 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
 [0 ,  0 ,  2.560048076 , .150237563 , -1.562470657 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
 [0 ,  0 ,  0 ,  -4.408964407 ,  -3.682212032 ,  0  ,  0 ,  0 ,  0 ,  0]
 [0 ,  0 ,  0 , 0 , 5.099019513 , 6.079600189 , 1.176696811 , 0 , 0 , 0]
 [0 ,  0 ,  0 , 0 , 0 , 5.295135649 , 8.091606465 , 2.643936044 , 0 , 0]
 [0 ,  0 ,  0 , 0 , 0 , 0 , 5.209730265 , 9.905754690 , 4.606764414 , 0]
 [0 ,  0 ,  0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 4.887292319 , 11.12405771 , 7.366041900]
 [0 ,  0 ,  0 , 0 , 0 , 0 , 0 ,  0 ,          5.00330508 , 9.805463395]
 [0 ,  0 ,  0 , 0 , 0 , 0 , 0 ,  0 ,   0 ,                -5.531212734]
```

c) Mit

$$H^{(j)}\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & & & \\ & c_j & s_j & \\ & s_j & -c_j & \\ & & & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ c_j x_j + s_j x_{j+1} \\ s_j x_j - c_j x_{j+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ergibt sich $\vec{x} = H^{(n-1)} \cdots H^{(1)} \vec{b}$ durch die überschreibende Rekursion $\vec{x} := H^{(j)}\vec{x}$, $j = 1, \ldots, n-1$:

$\vec{x} := \vec{b}$;
for $j = 1 \ldots n-1$ **do begin**
  $t := x_j$;
  $x_j := c_j\, t + s_j\, x_{j+1}$;
  $x_{j+1} := s_j\, t - c_j\, x_{j+1}$;
end ;

mit $4\,(n-1)$ Multiplikationen.

d) Induktion nach j. Start: $H^{(1)}$ hat die behauptete Form. Schritt $j-1 \to j$: $H^{(j)}\left(H^{(j-1)}\cdots H^{(1)}\right) =$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} \mathbb{I} & & & \\ & & & \\ \hline & c_j & s_j & \\ & s_j & -c_j & \\ \hline & & & \mathbb{I} \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|cc|c} * & * & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ * & \dots & * & * & 0 & \\ \hline * & \dots & * & * & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & & \mathbb{I} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} * & * & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ * & \dots & * & * & 0 & \\ \hline * & \dots & * & * & * & \\ * & \dots & * & * & * & \\ \hline & & & & & \mathbb{I} \end{array}\right).$$