Musterlösung Aufgabe 27

Aufgabe 27: (Cholesky-Zerlegung dünnbesetzter Matrizen)
Betrachte eine s.p.d. Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & d_2 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & d_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & d_n \end{pmatrix} .$$

Zeige, daß eine Faktorisierung $A = LL^T$ mit einem Cholesky-Faktor der Form

$$L = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & & \\ \beta_1 & \ddots & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} & \delta_{n-1} & \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \gamma_n \end{pmatrix}$$

existiert. Finde einen Algorithmus (in Pseudo-Code anzugeben), der die Daten $\delta_1, \dots, \gamma_n$ in der Laufzeit $O(n)$ bestimmt.

Musterlösung: Der Ansatz

$$L = \left(\begin{array}{c|c} l & 0 \\ \hline \vec{\gamma}^T & \gamma_n \end{array}\right) , \quad L^T = \left(\begin{array}{c|c} l^T & \vec{\gamma} \\ \hline 0 & \gamma_n \end{array}\right) , \quad LL^T = \left(\begin{array}{c|c} ll^T & l\vec{\gamma} \\ \hline (l\vec{\gamma})^T & \langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma} \rangle + \gamma_n^2 \end{array}\right) ,$$

führt mit

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} d_1 & a_1 & & & & a_n \\ a_1 & d_2 & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-2} & 0 \\ & & & a_{n-2} & d_{n-1} & a_{n-1} \\ \hline a_n & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & d_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & \vec{a} \\ \hline \vec{a}^T & d_n \end{array}\right)$$

zu

$$a = ll^T , \quad l\vec{\gamma} = \vec{a} , \quad d_n = \langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma} \rangle + \gamma_n^2 .$$

D.h., bestimme

i) den linken oberen $(n-1)\times(n-1)$-Block

$$l = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ \beta_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-2} & \delta_{n-1} \end{pmatrix}$$

von L durch Cholesky-Faktorisierung des 3-bändigen Blocks a,

ii) dann die n.te Zeile $\vec{\gamma}^T = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$ aus

$$l\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ \beta_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-2} & \delta_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n-1} \end{pmatrix} ,$$

iii) dann γ_n durch

$$\gamma_n = \sqrt{d_n - \langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma} \rangle} \; .$$

Zu i):

$$l = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ \beta_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-2} & \delta_{n-1} \end{pmatrix} , \quad l^T = \begin{pmatrix} \delta_1 & \beta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_{n-2} \\ & & & \delta_{n-1} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$ll^T = \begin{pmatrix} \delta_1^2 & \delta_1\beta_1 & & & \\ \delta_1\beta_1 & \beta_1^2+\delta_2^2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \delta_{n-2}\beta_{n-2} \\ & & & \delta_{n-2}\beta_{n-2} & \beta_{n-2}^2+\delta_{n-1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & & \\ a_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ & & a_{n-2} & d_{n-1} \end{pmatrix}$$

Die Cholesky-Faktorisierung des linken oberen Blocks ergibt sich hiermit durch

```
δ_1 := √d_1 ;
for i = 2 .. n − 1 do begin
   β_{i−1} := a_{i−1}/δ_{i−1} ;    δ_i := √(d_i − β²_{i−1}) ;
end;
```

Zu ii): Rücksubstitution

$\gamma_1 := a_n/\delta_1$;
`for` $i = 2$ .. $n-2$ `do` $\gamma_i := -\beta_{i-1}\,\gamma_{i-1}/\delta_i$;
$\gamma_{n-1} := (\, a_{n-1} - \beta_{n-2}\gamma_{n-2}\,) \,/\, \delta_{n-1}$;

Zu iii):

$$\gamma_n := \sqrt{d_n - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^2}\,;$$

Zusammengefaßt:

$\delta_1 := \sqrt{d_1}$; $\gamma_1 := a_n/\delta_1$;
`for` $i = 2$ .. $n-2$ `do begin`
$\beta_{i-1} := a_{i-1}/\delta_{i-1}$; $\delta_i := \sqrt{d_i - \beta_{i-1}^2}$; $\gamma_i := -\beta_{i-1}\,\gamma_{i-1}/\delta_i$;
`end;`

$$\beta_{n-2} := a_{n-2}/\delta_{n-2}\,;\quad \delta_{n-1} := \sqrt{d_{n-1} - \beta_{n-2}^2}\,;$$

$$\gamma_{n-1} := \frac{a_{n-1} - \beta_{n-2}\gamma_{n-2}}{\delta_{n-1}}\,;\quad \gamma_n := \sqrt{d_n - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^2}\,;$$

Rechenaufwand: $1 + 4\,(n-3) + 4 + n - 1 \approx 5\,n$ Multiplikationen, n Wurzeln.