Musterlösung Aufgabe 19

Aufgabe 19: (Implementierungsaufgabe: das Newton-Maehly-Verfahren, 12 Punkte)
Implementiere das Maehly-Verfahren zur automatischen Berechnung sämtlicher Nullstellen eines reellen Polynoms $p(x) = a_0 x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ohne komplexen Nullstellen. Eingabedaten: die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$, Ausgabedaten: alle Nullstellen $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$. Intern sollen Funktionsauswertungen von $p(x)$ und $p'(x)$ über das Horner-Schema erfolgen.

a) Teste das Programm mit den Polynomen

$$p_1(x) = (x-7)(x-6)\cdots(x-1) = x^7 - 28\,x^6 + 322\,x^5 - 1960\,x^4 + 6769\,x^3 - 13132\,x^2 + 13068\,x - 5040\,,$$

$$p_2(x) = (x-3)(x-2)^3(x-1)(x+1)^2 = x^7 - 8x^6 + 20x^5 - 6x^4 - 41x^3 + 38x^2 + 20x - 24\,.$$

b) Bestimme alle Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha = M/7\,777\,777$,

M= deine (bzw. eine eurer) Matrikelnummer(n). Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_3(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \lambda^4 - (\alpha+9)\lambda^3 + (9\alpha+25)\lambda^2 - (26\alpha+19)\lambda + (24\alpha-6).$$

Beachte, daß A als symmetrische Matrix nur reelle Eigenwerte hat, sodaß p_3 keine komplexen Nullstellen haben kann.

c) Betrachte das (eigentlich nicht zulässige) Polynom $p_4(x) = p_2(x) + 0.001$. Das Programm müßte alle 5 reellen Wurzeln finden. Versuche, die Lage der beiden nicht gefundenen Nullstellen in der komplexen Ebene mit Hilfe der gefundenen reellen Wurzeln zu ermitteln. (Hinweis: für $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = \prod(x - z_i)$ folgt $\sum z_i = -a_1$ und $\prod z_i = (-1)^n a_n$.)

Musterlösung: Lösung in MapleV.4:

```
horner:=proc(n,a,x)
local i,b,c:
   b:=a[0]: c:=a[0]: for i from 1 to n-1 do b:=b*x+a[i]: c:=c*x+b: od:
   [b*x+a[n], c];       # b*x+a[n] = polynom(x) , c = polynom'(x)
end:

maehly:=proc(n,a,anzahl_der_Nullstellen,genauigkeit)
local x_start,j,x,p,px,deltax,k,xx,
      Summe_der_restlichen_Wurzeln,
      Produkt_der_restlichen_Wurzeln:

   Summe_der_restlichen_Wurzeln:=-a[1];
   Produkt_der_restlichen_Wurzeln:=(-1)^n*a[n];
   x_start:= evalf(max( abs(a[n]/a[0]), seq( 1+abs(a[i]/a[0]), i=1..n-1 ) )):
   j:=1:
   while j<=anzahl_der_Nullstellen do
      x:=x_start:
      while true do
        horner(n,a,x): p:=op(1,"); px:=op(2,"");
        deltax:=p/(px-p*sum(1/(x-xx[k]),k=1..j-1)):
        x:=x-deltax:
        if abs(deltax)<genauigkeit then break: fi:
      od:
      xx[j]:=x:
      Summe_der_restlichen_Wurzeln:=Summe_der_restlichen_Wurzeln-xx[j]:
      Produkt_der_restlichen_Wurzeln:=Produkt_der_restlichen_Wurzeln/xx[j]:
      j:=j+1;
   od:
   print(xx):
   #  Summe  der restlichen Wurzeln muss Null sein
   # Produkt der restlichen Wurzeln muss  1   sein
   print(`  Summe der restlichen Wurzeln: `,  Summe_der_restlichen_Wurzeln):
   print(`Produkt der restlichen Wurzeln: `,Produkt_der_restlichen_Wurzeln):
   if anzahl_der_Nullstellen<n then
      print( `restliche Wurzeln: `,
      solve({a*b=Produkt_der_restlichen_Wurzeln,
             a+b=Produkt_der_restlichen_Wurzeln},{a,b})
           );
   fi;
end:

Digits:=16:

   # Aufgabenteil a), p1
   n:=7 : a[0]:=   1:a[1]:= -  28: a[2]:=  322: a[3]:=-1960:
          a[4]:=6769:a[5]:=-13132: a[6]:=13068: a[7]:=-5040:
```

```
maehly(n,a,n,10^(-10)):

             table([ 1 = 6.999999999998736
                     2 = 5.999999999998538
                     3 = 4.999999999998433
                     4 = 4.000000000005333
                     5 = 2.999999999999919
                     6 = 2.000000000000080
                     7 = 1.000000000000000 ])
           Summe der restlichen Wurzeln:     -.1042*10^(-11)
           Produkt der restlichen Wurzeln: ,  .9999999999993915

# Aufgabenteil a), p2
n:=7 : a[0]:=  1:a[1]:= -8: a[2]:= 20: a[3]:= -6:
       a[4]:=-41:a[5]:= 38: a[6]:= 20: a[7]:=-24:
maehly(n,a,n,10^(-10)):

             table([ 1 =  2.999999999999969
                     2 =  1.999983815405862
                     3 =  1.999989595457301
                     4 =  2.000016725091570
                     5 =  1.000000000000000
                     6 = - .9999999952949274
                     7 = -1.000000004700197 ])
             Summe der restlichen Wurzeln: ,    .98640404224*10^(-5)
             Produkt der restlichen Wurzeln: , 1.000004932120923

# Aufgabenteil b), p3
alpha:=1.0*3777777/7777777:
n:=4:  a[0]:=1:            a[1]:= -9-  alpha:
       a[2]:= 25+ 9*alpha: a[3]:=-19-26*alpha:  a[4]:= -6+24*alpha:
maehly(n,a,n,10^(-10)):

                 table([ 1 = 4.264626419208630
                         2 = 2.999999999999994
                         3 = 1.999999999999997
                         4 =  .2210878150770824 ])
                 Summe der restlichen Wurzeln: ,    .56*10^(-14)
                 Produkt der restlichen Wurzeln: , 1.000000000000002
# Anmerkung: die exakten Wurzeln sind
exakt:= 3,2, 1/2*alpha+2 + 1/2*(alpha^2-8*alpha+20)^(1/2),
             1/2*alpha+2 - 1/2*(alpha^2-8*alpha+20)^(1/2);

                 exakt := 3, 2, 4.264626419208628, .221087815077082

# Aufgabenteil c), p4
n:=7 : a[0]:=  1:a[1]:= -8: a[2]:= 20: a[3]:= -6:
```

```
       a[4]:=-41:a[5]:= 38: a[6]:= 20: a[7]:=-24+0.001:
maehly(n,a,n-2,10^(-10)):

                 table([ 1 =  2.999968746092964
                         2 =  2.047608993596442
                         3 = -1.002147619485920
                         4 = - .9978442785596099
                         5 =   .9998750390405419 ])
                 Summe der restlichen Wurzeln: ,   3.952539119315582
                 Produkt der restlichen Wurzeln: , 3.907411853551821

   restliche Wurzeln: , 1.953705926775911 + .3007407608431249 I,
                        1.953705926775911 - .3007407608431249 I
```