Übungsblatt 9

Aufgabe 28: (QR-Zerlegung von 3-Band-Matrizen, technische Durchführung)

Sei $$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & 0 \\ \alpha_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & & \alpha_{n-1} & \beta_n \end{pmatrix}.$$

a) Zeige induktiv

$$H^{(j-1)}\cdots H^{(1)}A = \left(\begin{array}{cccc|cc|ccc} u_1 & v_1 & w_1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & u_{j-1} & v_{j-1} & w_{j-1} & & & \\ \hline & & & & \tilde\beta_j & \tilde\gamma_j & 0 & & \\ & & & & \alpha_j & \beta_{j+1} & \gamma_{j+1} & & \\ \hline & & & & 0 & \alpha_{j+1} & \beta_{j+2} & \gamma_{j+2} & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right),$$

wobei rekursiv

$$H^{(j)} = \left(\begin{array}{c|cc|c} \mathbb{I} & & & \\ \hline & c_j & s_j & \\ & s_j & -c_j & \\ \hline & & & \mathbb{I} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow j \\ \leftarrow j+1 \\ \\ \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} c_j = \tilde\beta_j \,/\, \sqrt{\tilde\beta_j^2 + \alpha_j^2} \\ s_j = \alpha_j \,/\, \sqrt{\tilde\beta_j^2 + \alpha_j^2} \end{array}$$

(bzw. $c_j = 1$, $s_j = 0$ für $\alpha_j = 0$) gewählt wird. Gestartet wird mit $\tilde\beta_1 := \beta_1$, $\tilde\gamma_1 := \gamma_1$. (4)

Anleitung: $H^{(j)}$ wirkt nur auf die Zeilen j und $j+1$ des Schemas.

Zeige, daß $H^{(j)}$ orthogonal ist. (1)

Anmerkung: es braucht nicht verifiziert zu werden, daß $H^{(j)}$ der Householder-Konstruktion aus der Vorlesung entspricht (was –bis auf Vorzeichen– in der Tat der Fall ist).

b) Leite aus a) eine Rekursion zur Berechnung der 3 Bänder von

$$R = H^{(n-1)}\cdots H^{(1)}A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & w_{n-2} \\ & & & \ddots & v_{n-1} \\ 0 & & & & u_n \end{pmatrix}$$

her. Benutze dabei die Daten c_j, s_j der Matrizen $H^{(j)}$. Mit welchem Aufwand wird R ermittelt? Implementiere die Rekursion und gebe diese Daten für $(\alpha_i) = (-3, -2, \ldots, 5)$, $(\beta_i) = (1, 2, \ldots, 10)$, $(\gamma_i) = (1, 2, \ldots, 9)$ an. (5)

c) Die Daten c_j, s_j der Householder-Matrizen aus a) liegen vor. Wie und mit welchem Aufwand berechnet sich die Transformation $Q^T\vec{b} = H^{(n-1)}\cdots H^{(1)}\vec{b}$ eines beliebigen Vektors $\vec{b}$? (2)

d) Zeige $Q^T = H^{(n-1)} \cdots H^{(1)} = \begin{pmatrix} * & * & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}.$ (1)

Anleitung:
$$H^{(j-1)} \cdots H^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} * & * & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ * & \dots & * & * & 0 & \\ \hline * & \dots & * & * & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & & \mathbb{1} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Aufgabe 29: (Zu Matrixnormen und Konditionszahlen)

a) Zeige $\|A\|_1 = \max\limits_{\vec{x} \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max\limits_{j=1 \dots n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,.$ (2)

Anleitung: ein Vektor $\vec{x}$, für den das Maximum angenommen wird, läßt sich explizit angeben.

b) Zeige $\|A\|_2 = \|A^T\|_2$ und folgere $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(A^T)$. (1)

Anleitung: setze A als invertierbar voraus. Für singuläre Matrizen: Stetigkeit der Norm.

c) Für die invertierbare 4×4-Matrix A gelte $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \; A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Zeige: $\mathrm{cond}_\infty(A) \geq 2.8$. (1)

Abgabe: Mittwoch, 14.1.98, in den Übungsgruppen