Übungsblatt 8

Aufgabe 25: (Zu Gauß-Elimination und Pivotierung)
In folgendem Beispiel kann jede Zwischenrechnung per Hand vorgenommen werden. Es sei $|\epsilon| \ll \tau =$ Maschinengenauigkeit (etwa $\epsilon = 10^{-20}$ bei $\tau \approx 10^{-16}$). Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimme die exakte Lösung, entwickle sie in eine Potenzreihe in ϵ und benutze dann $|\epsilon| \ll \tau$, um die exakte Lösung in der Maschinengenauigkeit anzugeben. (1)

b) Führe die Gauß-Elimination ohne Zeilenvertauschung durch, wobei in jedem Rechenschritt auf die Maschinengenauigkeit gerundet wird (darstellbar z.B. mittels $rd(\epsilon^{-1})$). (2)

c) Vertausche die Zeilen und führe die gerundete Gauß-Elimination noch einmal durch. (2)

Aufgabe 26: (Eigenschaften positiv definiter Matrizen)
Eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ heißt **positiv definit** (s.p.d.), wenn $\langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle > 0$ für alle $0 \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, wobei $\langle .,. \rangle$ das übliche Euklidische Skalarprodukt darstellt. Zeige:

a) $a_{ii} > 0 \, , \quad i = 1, \ldots, n \, .$ (1)

b) $a_{ij}^2 < a_{ii}\, a_{jj} \, , \quad i \neq j \in \{1, \ldots, n\}.$ (1)

c) Alle Eigenwerte sind rell und positiv, die Matrix ist invertierbar. (1)

d) Alle durch Streichen von k Zeilen und den entsprechenden Spalten entstehenden symmetrischen Untermatrizen der Größe $(n-k) \times (n-k)$ sind wieder positiv definit. (1)

e) Betrachte die Blockzerlegung $A = \begin{pmatrix} a & \vec{a} \\ \vec{a}^T & a_{nn} \end{pmatrix}$ mit dem $(n-1) \times (n-1)$-Block a. Zeige: a ist invertierbar, und es gilt $a_{nn} > \langle \vec{a}, a^{-1}\vec{a} \rangle$. (2)

Anleitung: b) Betrachte Vektoren der Form $\vec{x} = (0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots,0,\overset{j}{x},0,\ldots,0)^T$ mit geeignetem x. e) Betrachte $\langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle$ mit $\vec{x} = (?, 1)^T$.

Aufgabe 27: (Cholesky-Zerlegung dünnbesetzter Matrizen)

Betrachte eine s.p.d. Matrix der Form $A = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & a_n \\ a_1 & d_2 & \ddots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \ddots & d_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} & d_n \end{pmatrix}$. Zeige, daß eine Faktorisierung $A = LL^T$ mit einem Cholesky-Faktor der Form

$$L = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & \\ \beta_1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \beta_{n-2} & \delta_{n-1} & \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \gamma_n \end{pmatrix}$$

existiert. Finde einen Algorithmus (in Pseudo-Code anzugeben), der die Daten $\delta_1, \ldots, \gamma_n$ in der Laufzeit $O(n)$ bestimmt. Anleitung: Partitionierung wie im Beweis von Satz 4.27. (8)

ABGABE: Mittwoch, 7. 1. 98, in den Übungsgruppen

FROHE WEIHNACHTEN UND EINEN GUTEN RUTSCH!