NUMERIK I — Wintersemester 97/98

DR. WALTER OEVEL — 9. 12. 1997

Übungsblatt 7

Aufgabe 22: (Zu Dreiecksmatrizen)

Es sei L eine invertierbare untere $n \times n$-Dreiecksmatrix, B sei eine beliebige $n \times m$-Matrix. Es soll $X = L^{-1}B$ bestimmt werden.

a) L^{-1} sei nicht bekannt. Mit wievielen Additionen kann X per Rücksubstitution berechnet werden? Anleitung: berechne $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ spaltenweise. (2)

b) L^{-1} sei bekannt. Wieviele Additionen braucht die Matrixmultiplikation $L^{-1}B$? (2)

Sei $$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Beantworte a) für dieses L. (2)

d) Bestimme L^{-1} (exakt). Beantworte b) für dieses L. (2)

Man sieht: die Benutzung der Inversen L^{-1} ist nicht nur überflüssig (vergleiche a) und b)), sondern kann sogar schädlich sein (vergleiche c) und d)).

Aufgabe 23: (LR-Faktorisierung ohne Zeilenvertauschung)

Eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ heißt (stark) **diagonaldominant**, wenn in jeder Zeile das Diagonalelement im Sinne von $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n)$$ dominiert.

a) Zeige, daß diagonaldominante Matrizen eine LR-Faktorisierung $A = LR$ ohne Zeilenvertauschung zulassen. Zeige, daß solche Matrizen automatisch invertierbar sind. (4)

Anleitung: nach dem ersten Schritt des Gauß-Verfahrens sei die Matrix auf die Form

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{array}\right), \quad a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, \quad i, j = 2, \ldots, n$$

gebracht. Zeige, daß der $(n-1) \times (n-1)$-Block (a'_{ij}) wieder diagonaldominant ist.

b) In der obigen Definition der Diagonaldominanz wird die Ungleichung $>$ durch $\geq$ ersetzt. Ist bei zusätzlich vorausgesetzter Invertierbarkeit eine Faktorisierung $A = LR$ ohne Zeilenvertauschung garantiert? (1)

Aufgabe 24: (LR-Faktorisierung von Bandmatrizen)

Das $n \times n$-Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ist zu lösen.

a) Finde die (exakten) Daten der LR-Zerlegung $A = LR$. (3)

Anleitung: die die Bänder von L und R definierende Rekursion ist leicht lösbar.

b) Berechne (exakt) den Lösungsvektor $\vec{x}$ für $\vec{b} = (1, \ldots, 1)^T$. (3)

Anleitung: die Rekursionen der Rücksubstitutionen sind für dieses $\vec{b}$ leicht lösbar.

c) Berechne numerisch die Komponente $x_{10\,000}$ für $\vec{b} = (\sin(1), \sin(2), \ldots, \sin(n))^T$, $n = 500\,000$. (3)

Welcher Speicherplatzbedarf fällt an? Notiere die Laufzeit, Quelltext des Programmes mitabgeben!

Achtung! Das Gleichungssystem ist schlecht konditioniert, relative Rundungsfehler werden um Faktoren der Größenordnung n^2 verstärkt!

ABGABE: Mittwoch, 17. 12., in den Übungsgruppen (alternativ: in der Vorlesung oder in meinem Büro D1.329)