Übungsblatt 6

Aufgabe 18: (Monotone Konvergenz des Newton-Verfahrens bei Polynomen)
Es sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein reelles Polynom mindestens 2. Grades mit reellen Nullstellen $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_N$ und komplexen (eventuell übereinstimmenden) Nullstellenpaaren $\xi_1, \bar{\xi}_1, .., \xi_M, \bar{\xi}_M$. Es sei $x_1 \geq \max\{Re(\xi_1), .., Re(\xi_M)\}$ (mit $Re(.)$ =Realteil). Zeige, daß für jeden Startpunkt $x^{(0)} > x_1$ die Newton-Iteration $x^{(i+1)} = x^{(i)} - p(x^{(i)})/p'(x^{(i)})$ monoton fallend gegen x_1 konvergiert. (3)
Anleitung: Mit $p(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_N)\Big((x - \xi_1)(x - \bar{\xi}_1) \Big) \cdots \Big((x - \xi_M)(x - \bar{\xi}_M) \Big)$ folgt

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \cdots + \frac{1}{x - x_N} + \frac{2(x - Re(\xi_1))}{(x - \xi_1)(x - \bar{\xi}_1)} + \cdots + \frac{2(x - Re(\xi_M))}{(x - \xi_M)(x - \bar{\xi}_M)} .$$

Hiermit läßt sich leicht zeigen, daß die $x^{(i)}$ monoton fallen und x_1 nicht unterschreiten können.

Aufgabe 19: (Implementierungsaufgabe: das Newton-Maehly-Verfahren, 12 Punkte)
Implementiere das Maehly-Verfahren zur automatischen Berechnung sämtlicher Nullstellen eines reellen Polynoms $p(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ohne komplexen Nullstellen. Eingabedaten: die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$, Ausgabedaten: alle Nullstellen $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$. Intern sollen Funktionsauswertungen von $p(x)$ und $p'(x)$ über das Horner-Schema erfolgen.

a) Teste das Programm mit den Polynomen

$$p_1(x) = (x-7)(x-6)\cdots(x-1) = x^7 - 28\,x^6 + 322\,x^5 - 1960\,x^4 + 6769\,x^3 - 13132\,x^2 + 13068\,x - 5040\,,$$

$$p_2(x) = (x-3)(x-2)^3(x-1)(x+1)^2 = x^7 - 8x^6 + 20x^5 - 6x^4 - 41x^3 + 38x^2 + 20x - 24\,.$$

b) Bestimme alle Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha = M/7\,777\,777$, $M=$ deine (bzw. eine eurer) Matrikelnummer(n). Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_3(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \lambda^4 - (\alpha+9)\lambda^3 + (9\alpha+25)\lambda^2 - (26\alpha+19)\lambda + (24\alpha-6).$$

Beachte, daß A als symmetrische Matrix nur reelle Eigenwerte hat, sodaß p_3 keine komplexen Nullstellen haben kann.

c) Betrachte das (eigentlich nicht zulässige) Polynom $p_4(x) = p_2(x) + 0.001$. Das Programm müßte alle 5 reellen Wurzeln finden. Versuche, die Lage der beiden nicht gefundenen Nullstellen in der komplexen Ebene mit Hilfe der gefundenen reellen Wurzeln zu ermitteln. (Hinweis: für $p(x) = x^n + a_1\,x^{n-1} + \cdots + a_n = \prod(x - z_i)$ folgt $\sum z_i = -a_1$ und $\prod z_i = (-1)^n a_n$.)

Die Bearbeitung von Aufgabe 19 ist getrennt bis Mittwoch, 17. Dez., abzugeben (Quelltext des Programms (hinreichend gut dokumentiert!) und Rechenergebnisse). Zur Erzwingung eines "copyright-Prinzips" zwischen den bearbeitenden Kleingruppen G_i wird nach folgendem Algorithmus bewertet: sollten wir den Eindruck gewinnen, daß verschiedene Gruppen $G_1, G_2, \ldots$ dieselben –nicht durch unabhängige Arbeit erzeugten– Resultate liefern, so wird die Mächtigkeit $|G|$ der vereinigten Gruppe $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots$ betrachtet. Jedem Element in G wird dann die mit $\min\{3, |G|\}/|G|$ multiplizierte Punktzahl zugeschrieben, die die abgelieferte Lösung erreicht.

Aufgabe 20: (Zur Blockzerlegung von Matrizen)

a) Es seien a bzw. b invertierbare Matrizen der Dimension $n_1 \times n_1$ bzw. $n_2 \times n_2$. Stelle die Inverse der aus diesen Blöcken aufgebauten $(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)$-Matrix $\begin{pmatrix} a & \mathbf{O} \\ c & b \end{pmatrix}$ mittels a^{-1} und b^{-1} dar ($\mathbf{O}$ ist ein Block aus trivialen Einträgen). (2)

b) Zeige, daß die Inverse einer unteren Dreiecksmatrix wieder eine untere Dreiecksmatrix ist. Anleitung: Induktion nach der Dimension, a) liefert den Induktonsschritt. (1)

c) Leite aus a),b) einen Algorithmus zur Berechnung der Inversen einer unteren Dreiecksmatrix ab, formuliere ihn in Pseudo-Code. Wieviele Multiplikationen werden bei einer $(n \times n)$-Matrix benötigt? (3)

Aufgabe 21: (Strassens Matrixmultiplikation)

Betrachte den Strassen-Algorithmus zur Multiplikation zweier $2^m \times 2^m$-Matrizen. Zeige, daß 7^m skalare Multiplikation und $6 \times (7^m - 4^m)$ skalare Additionen auszuführen sind. Anleitung: aus der Zerlegung in Blöcke halber Dimension ergibt sich eine Rekursionsrelation zwischen $M(m)$ und $M(m-1)$, wo $M(m)$ die Anzahl der skalaren Multiplikationen ist. Analog für die Additionen. (2)

ABGABE: Mittwoch, 10. 12. 97, in den Übungsgruppen/Büro D1.329