Ü b u n g s b l a t t 4

Aufgabe 10: (Zum Newton-Verfahren)
Diskutiere das Verhalten der Newton-Iteration für die Funktion $f(x) = x/\sqrt{|x|} = \operatorname{sign}(x)\ \sqrt{|x|}$. Warum ergibt sich kein Widerspruch zu Satz III.15? (1)

Aufgabe 11: (a priori Abschätzungen beim Newton-Verfahren)
Viele Computersprachen benutzen intern zur Berechnung einer Quadratwurzel $\sqrt{X}$ die Newton-Iteration für $f(x) = x^2 - X = 0$, die mit den Grundrechenarten durchgeführt werden kann. Durch sukzessives Multiplizieren mit oder Teilen durch 4 (im Binärsystem sehr einfach durchzuführen) kann dieses Problem auf das Intervall $1 \leq X \leq 4$ reduziert werden.

a) Zeige durch eine einfache graphische Betrachtung, daß die Newton-Iteration

$$x \ \to \ \Phi(x) \ = \ x \ - \ \frac{f(x)}{f'(x)} \ = \ \frac{1}{2}\ \left(x \ + \ \frac{X}{x} \right)$$

für jeden Startwert $x_0 > \sqrt{X}$ monoton fallend konvergiert. (1)

b) Wähle $x_0 = (X+1)/2$ (dieser Punkt $x_0 = \Phi(1) = \Phi(X)$ würde sich als Iterationswert ergeben, wenn man mit einem Randwert des Intervalls $1 \leq \sqrt{X} \leq X$ startet). Die Newton-Iteration $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ vollzieht sich dann auf dem Intervall $[\sqrt{X}, (X+1)/2]$. Zeige, daß sich der relative Fehler durch

$$\frac{|x_i - \sqrt{X}\ |}{\sqrt{X}} \ \leq \ 2 \ \left(\frac{(X-1)^2}{8\ \sqrt{2\,X^{3/2}\,(X+1)}} \right)^{(2^i)} \ \stackrel{(*)}{\leq} \ 2 \ \left(\frac{9}{8\ \sqrt{80}} \right)^{(2^i)}$$

abschätzen läßt. Verwende für $(*)$ (ohne Beweis), daß $g(X) = (X-1)^2/\sqrt{X^{3/2}\,(X+1)}$ für $X \geq 1$ monoton in X wächst. (4)

c) Nach wievielen Iterationsschritten kann eine relative Genauigkeit von 16 Dezimalstellen garantiert werden? (1)

d) Führe die Iteration für $X = 4$ durch und vergleiche die obige a priori Abschätzung mit dem wirklichen Fehler. (2)

Aufgabe 12: (Zum Newton-Verfahren bei mehrfachen Nullstellen)
Es sei x^* eine q-fache Nullstelle einer hinreichend glatten Funktion f, d.h., es gelte

$$f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(q-1)}(x^*) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(q)}(x^*) \neq 0\,.$$

a) Zeige (Taylor-Entwicklung): $f^{(i)}(x^* + h) = \dfrac{h^{q-i}}{(q-i)!}\ \Big(f^{(q)}(x^*) + o(1) \Big)$, $i = 0,\ldots, q$. (2)

Zur Erinnerung: das Landau-Symbol $o(1)$ steht für eine Funktion mit $\lim\limits_{h\to 0} o(1) = 0$.

b) Zeige: auf einer Umgebung von x^* ist $\psi(x) = f(x)/f'(x)$ stetig mit $\psi(x^*) = \lim\limits_{x\to x^*} \psi(x) = 0$, weiterhin stetig differenzierbar, und es gilt $\psi'(x^*) = \lim\limits_{x\to x^*} \psi'(x) = 1/q$. Aufgabenteil a) ist hierbei hilfreich. (2)

c) Folgere, daß das Newton-Verfahren $\Phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ auch bei q-fach entarteten Nullstellen immer lokal konvergiert, für $q > 1$ allerdings nur linear. (1)

d) Zeige, daß die Banach-Iteration mit $\Phi(x) = x - q\, f(x)/f'(x)$ (modifiziertes Newton-Verfahren) wieder quadratisch konvergiert. (1)

Aufgabe 13: (Zum Steffensen-Verfahren)
Unter welcher Bedingung (an $f'(x^*)$) ist die Differenz im Nenner des Steffensen-Verfahrens $x \to x - \dfrac{f(x)^2}{f(x+f(x)) - f(x)}$ in der Nähe der Lösung x^* durch Auslöschung gefährdet? (2)

Abgabe: Mittwoch, 19. 11. 97, in den Übungsgruppen