Ü b u n g s b l a t t 13

Die folgenden Aufgaben werden nicht mehr auf die "maximal erreichbare Punktzahl" angerechnet, sodaß Zusatzpunkte zur Verbesserung der Punktbilanz erlangt werden können:

Aufgabe 38: (Zur Lagrange-Interpolation)

Es seien $L_i(x) = \prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$ die den (paarweise verschiedenen) Stützstellen $x_0,\ldots,x_n$ zugeordneten Lagrange-Polynome.

a) Zeige, daß sie eine "Zerlegung der Eins" bilden: $\sum\limits_{i=0}^{n} L_i(x) = 1\,.$ (1)

Anleitung: betrachte die Interpolation durch die Stützwerte $f_i = 1$.

b) Schließe auf die Identität
$$\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{x-x_i} \prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{x_i-x_j}} = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\,. \qquad (2)$$

c) Folgere
$$L_i(x) = \frac{\dfrac{\kappa_i}{x-x_i}}{\sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{\kappa_j}{x-x_j}} \quad \text{mit} \quad \kappa_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i-x_j}\,,\ i=0,\ldots,n\,. \qquad (1)$$

d) Zeige $\sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i = 0\,.$ (1)

Anleitung: betrachte die höchste x-Potenz in $L_i(x) = \kappa_i \prod(x-x_j)$ und $\sum_i L_i(x) = 1\,.$

e) Die "Stützkoeffizienten" $\kappa_0,\ldots,\kappa_n$ zu $x_0,\ldots,x_n$ seien berechnet. Es wird nun eine weitere Stützstelle x_{n+1} betrachtet. Wie lassen sich die neuen Stützkoeffizienten $\tilde\kappa_0,\ldots,\tilde\kappa_{n+1}$ zu $x_0,\ldots,x_{n+1}$ schnell aus den schon vorliegenden Daten ermitteln? (1)

f) Zeige, daß sich im äquidistanten Fall $x_i = x_0 + i\,h$ $(i = 0,\ldots,n)$ die Darstellung c) der Lagrange-Polynome mit den Stützkoeffizienten $\kappa_i = (-1)^i \binom{n}{i}$ ergibt. Hierbei wurde der Faktor $(-1)^n/(n!\,h^n)$ fortgelassen (warum?). Wie lassen sich die Koeffizienten mit insgesamt $2n$ Multiplikationen berechnen? (2)

Aufgabe 39: (Polynominterpolation und Newton-Schema)

In der folgenden Wertetabelle

x	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	0.75	0.76	0.79	0.84	0.91	0.99	1.11	1.24	1.39	1.56	1.75	1.96	2.19

eines Polynoms niedriger Ordnung ist einer der Funktionswerte falsch. Finde ihn, berichtige ihn, bestimme das Polynom. Anleitung: berechne die dividierten Differenzen. (3)

Aufgabe 40: (Fehlerabschätzung der Polynominterpolation)

Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ soll äquidistant auf dem Intervall $[0,\pi/2]$ durch ein Polynom $p(x)$ vom maximalen Grad n interpoliert werden. Wie groß muß n gewählt werden, damit $|f(x)-p(x)| < 10^{-10}$ für alle $x \in [0,\pi/2]$ garantiert werden kann? (3)

ABGABE: Mittwoch, 4. 2., in den Übungsgruppen