NUMERIK I — Wintersemester 97/98

DR. WALTER OEVEL — 20. Januar 1998

Übungsblatt 11

Aufgabe 34: (Zur Banach-Iteration)
Gesucht ist eine positive Lösung ($x_i > 0$) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 + x_1^2 \\ x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1} &= 1 + x_i^2 \qquad (i = 2, \ldots, n-1) \\ x_{n-1} + 2x_n &= 1 + x_n^2 . \end{aligned}$$

Zeige, daß jeder Fixpunkt der durch

$$y_1 = 1 + \sqrt{x_2}\,, \quad y_i = 1 + \sqrt{x_{i-1} + x_{i+1}} \quad (i = 2, \ldots, n-1)\,, \quad y_n = 1 + \sqrt{x_{n-1}}$$

definierten Abbildung $\vec{y} = \vec{\Phi}(\vec{x})$ eine solche Lösung liefert. Zeige $\vec{\Phi}(Q) \subset Q$ für den Quader $Q = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ x_1, \ldots, x_n \in [2,4] \,\}$. Finde eine Kontraktionskonstante und berechne für $n = 100$ die Norm $\|\vec{x}^*\|_\infty$ der Lösung bis auf 10 Dezimalstellen genau. (5)

Aufgabe 35: (Eigenwertabschätzungen: Gerschgorin-Kriterium und Rayleigh-Quotienten)

a) Finde über das Gerschgorin-Kriterium eine obere Schranke für

$$\mathrm{cond}_2 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Anleitung: für symmetrisches A mit den Eigenwerten λ_i gilt $\mathrm{cond}_2(A) = \rho(A)\rho(A^{-1}) = \max_i |\lambda_i| / \min_i |\lambda_i|$.

b) Zeige, daß die Näherungen $\lambda_\pm = \pm 10^{10}$ zwei Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 10^{10} & 0 \\ 10^{10} & 10^{20} & 10^{30} \\ 0 & 10^{30} & 10^{40} \end{pmatrix}$$

bis auf etwa 10 Dezimalstellen relativer Genauigkeit approximieren. (5)

Anleitung: Satz 6.3.b) mit den approximativen Eigenvektoren $\vec{x}_\pm = (1, \pm 1, \mp\varepsilon)^T$, $\varepsilon = 10^{-10}$.

Aufgabe 36: (Konvergenz gegen einen Eigenraum)
Die Konvergenz einer Vektorfolge $\vec{x}^{(i)} = \vec{x}_E^{(i)} + \vec{x}_F^{(i)}$ gegen den Unterraum $E \subset \mathbb{C}^n = E \oplus F$ ist in 6.11 durch $\lim\limits_{i\to\infty} \|\vec{x}_F^{(i)}\| / \|\vec{x}^{(i)}\| = 0$ definiert. Zeige, daß diese Definition unabhängig von der Wahl des Komplementärraums F ist. (2)

Anleitung: seien $\vec{x} = \vec{x}_E + \vec{x}_F = \vec{y}_E + \vec{y}_{F'}$ die Zerlegungen bzgl. $E \oplus F$ bzw. $E \oplus F'$. Beachte: Aus $\vec{z} \to 0$ folgt stets $\vec{z}_E \to 0$ und $\vec{z}_F \to 0$.

ABGABE: Mittwoch, 28. 1., in den Übungsgruppen