Übungsblatt 10

Aufgabe 30: (Zur geometrischen Interpretation der Konditionszahl)
Es soll gezeigt werden, daß eine Matrix $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ dann schlecht konditioniert ist, falls einige der Spalten $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^n$ "fast parallel" sind. Zeige: für jedes Spaltenpaar $i_1 \neq i_2$ gilt mit dem durch $\cos(\phi) = \dfrac{< \vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2} >}{\|\vec{a}_{i_1}\|_2 \|\vec{a}_{i_2}\|_2}$ gegebenen Winkel ϕ zwischen $\vec{a}_{i_1}$ und $\vec{a}_{i_2}$ die Abschätzung

$$\operatorname{cond}_2(A) \ \geq \ \frac{\sqrt{1 + 3\,\cos^2(\phi)}}{|\sin(\phi)|} \ . \tag{4}$$

Anleitung: mit $\|A\|_2 \geq \|A\vec{x}_+\|_2 / \|\vec{x}_+\|_2$ und $\|A^{-1}\|_2 \geq \|\vec{x}_-\|_2 / \|A\vec{x}_-\|_2$ folgt $\operatorname{cond}_2(A) \geq \dfrac{\|\vec{x}_-\|_2}{\|\vec{x}_+\|_2} \dfrac{\|A\vec{x}_+\|_2}{\|A\vec{x}_-\|_2}$ für beliebige Vektorpaare $\vec{x}_\pm \neq 0$. Mit der Standardbasis $\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ wähle $\vec{x}_\pm = \vec{e}_{i_1} \pm \gamma\, \vec{e}_{i_2}$ mit einem geeigneten γ.

Aufgabe 31: (Zur Konditionierung von Gleichungslösern)

a) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ wird durch Gauß-Elimination mit bzw. ohne Pivotierung auf die obere Dreiecksmatrix R transformiert (vergleiche Aufgabe 25). Berechne jeweils R und vergleiche für $|\epsilon| \ll 1$ die Konditionszahlen $\operatorname{cond}_\infty(A)$ und $\operatorname{cond}_\infty(R)$ (exakte Rechnung ohne Rundung). (4)

Man sieht: durch Gauß-Elimination ohne Pivotierung kann die Konditionierung eines Gleichungssystems bei Transformation auf gestaffelte Form extrem verschlechtert werden. Diese Situation kann für die Cholesky-Zerlegung nicht auftreten:

b) Zeige, daß für die Cholesky-Faktoren einer s.p.d. Matrix $A = LL^T$ gilt:

$$\operatorname{cond}_2(L) \ = \ \operatorname{cond}_2(L^T) \ = \ \sqrt{\operatorname{cond}_2(A)} \ \leq \ \operatorname{cond}_2(A) \ . \tag{1}$$

Ähnliches gilt für die QR-Zerlegung:

c) Zeige, daß durch Multiplikation mit orthogonalem H die spektrale Konditionszahl nicht verändert wird: $\operatorname{cond}_2(HA) = \operatorname{cond}_2(A)$. (1)

Folgerung: alle Zwischenschemata $H^{(j-1)} \cdots H^{(1)} A$ der QR-Zerlegung durch Householder-Transformationen haben dieselbe Konditionierung wie die Ausgangsmatrix A.

Aufgabe 32: (Zum Einzelschrittverfahren)

a) Für welche Werte von ϵ konvergiert das Einzelschrittverfahren für Gleichungssysteme mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \epsilon & \dots & \epsilon \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \epsilon \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad ? \qquad (3)$$

Anleitung: $(D+l)^{-1}r$ läßt sich explizit angeben.

b) Es sei $\epsilon = 0.05$. Wieviele Iterationsschritte werden benötigt, um die Lösung bezüglich $\|.\|_1$ garantiert auf die relative Genauigkeit 10^{-10} zu bestimmen? (1)

Aufgabe 33: (Zur Konvergenz des Einzelschrittverfahrens bei positiv definiten Matrizen)

Zeige, daß das Einzelschrittverfahren für alle (reellen) s.p.d. Matrizen konvergiert. (4)

Anleitung: Die Matrix sei in der Form $A = l + D + l^T$ zerlegt. Betrachte einen (eventuell komplexen) Eigenvektor $\vec{x}$ von $(D+l)^{-1}l^T$ zum (eventuell komplexen) Eigenwert λ. Zeige

$$\lambda = \frac{\langle \vec{x}, l^T \vec{x} \rangle}{\langle \vec{x}, l\vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, D\,\vec{x} \rangle} \, ,$$

wobei $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_i \bar{x}_i y_i$ das übliche komplexe Skalarprodukt ist. Aus der positiven Definitheit von A folgt eine geeignete Abschätzung für $|\lambda|$.

ABGABE: Mittwoch, 21. 1., in den Übungsgruppen