Übungsblatt 1

Die erreichbaren Punkte sind in Klammern angegeben.

Aufgabe 1: (Zur Gleitpunktdarstellung)
Es sei eine Basis $E \in \{2, 3, \ldots\}$ und eine Mantisse $a \in [E^{-1}, 1)$ gegeben. Mit der üblichen Gaußklammer $\lfloor\ \rfloor$ sind die Ziffern von a zur Basis E rekursiv durch

$$a_1 = \lfloor a\, E \rfloor\ , \quad a_n = \lfloor \Big(a - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, E^{-i} \Big)\, E^n \rfloor\ , \quad n = 2, 3, \ldots$$

definiert. Zeige: $a_n \in \{0, 1, \ldots, E-1\}$, $a_1 \neq 0$ und $0 \leq a - \sum_{i=1}^{n} a_i\, E^{-i} < E^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$ (4)
Anleitung: $\delta_n = a - \sum^n a_i E^{-i}$ erfüllt $\delta_n = \delta_{n-1} - \lfloor \delta_{n-1} E^n \rfloor E^{-n}$, es gilt $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1) \forall x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: (Zur Gleitpunktdarstellung)
Finde die Gleitpunktdarstellung $\mathrm{rd}(x) = \pm\ (\sum_{i=1}^{N} a_i E^{-i})\ E^b$ der Zahlen 20 und $\pi = 3.1415926...$ auf $N = 5$ Binärstellen (also Basis $E = 2$). (4)

Aufgabe 3: (Zur "Auslöschung" zweier Zahlen)
Beweise die folgende Behauptung: (8)

> *Es seien x und y zwei in einer beliebigen Basis auf eine beliebige Stellenzahl dargestellte Maschinenzahlen gleichen Vorzeichens. Wenn $1/2 \leq x/y \leq 2$ gilt, dann ist die Differenz $x - y$ wieder eine Maschinenzahl. Mit*
>
> $$\mathrm{rd}(x - y) = x - y \qquad (\textit{exakt!})$$
>
> *tritt kein Rundungsfehler auf!*

Anleitung: Mit den Exponenten a,b und den Mantissenziffern $x_1, \ldots, x_N$, $y_1, \ldots, y_N$ seien die N-stelligen Darstellungen

$$x = x_1\, E^{a-1} + \cdots + x_N\, E^{a-N}\ , \quad y = y_1\, E^{b-1} + \cdots + y_N\, E^{b-N}\ ,$$

$$x_1, \ldots, y_N \in \{0, 1, \ldots, E-1\}\ , \quad x_1, y_1 \neq 0$$

zur Basis $E \in \{2, 3, \ldots\}$ gegeben. O.B.d.A. gelte $0 < y \leq x$ und damit $b \leq a$. Zeige zunächst, daß die Differenz

$$x - y = z_1\, E^{a-1} + \cdots + z_{N+a-b}\, E^{b-N}\ , \quad z_1, \ldots, z_{N+a-b} \in \{0, 1, \ldots, E-1\}$$

mit maximal $N + a - b$ Stellen dargestellt werden kann. Aus der Voraussetzung $x/y \leq 2$ folgt dann entweder $a = b$ oder $a = b + 1$, $z_1 = 0$.

Aufgabe 4: (Fehlerfortpflanzung)
Berechne die Verstärkungsfaktoren des Fehlers von $\sqrt{2}$ bei der Berechnung von

$$x = 2\, \frac{71 - 25\sqrt{2}}{71 - 50\sqrt{2}}\ , \quad y = -\, \frac{100}{71 - 50\sqrt{2}}$$

in Beispiel 1.3 der Vorlesung. (4)

Abgabe: Mittwoch, 29. 10. 97, in den Übungsgruppen