Übungsaufgaben zur
"Stochastik für Informatiker"
Serie 7.

---

1. *Überprüfen der Eigenschaften von Verteilungsfunktionen*

   a) Sind folgende Funktionen Verteilungsfunktionen?

$$F_1(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin x & 0 \le x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \le x \end{cases} \tag{1}$$

$$F_2(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2\sin x & 0 \le x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \le x \end{cases} \tag{2}$$

$$F_3(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin(2x) & 0 \le x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \le x \end{cases} \tag{3}$$

$$F_4(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}\sin x & 0 \le x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \le x \end{cases} \tag{4}$$

   b) Falls F_i eine Verteilungsfunktion ist, gebe man die Zerlegung $F_i = F_i^d + F_i^c$ in einen diskreten und einen stetigen Anteil an und bestimme die Dichte des stetigen Anteils.

(6 Punkte)

---

2. *Bedingungen an Konstanten*

Welchen Bedingungen müssen die Konstanten a, b, c genügen, damit die nachfolgende Funktion F

(I) eine stetige Verteilungsfunktion ist?

(II) eine Verteilungsfunktion ist?

(i) $$F(x) := \begin{cases} 0 & x < e \\ a & x = e \\ bx + c & e < x \le \pi \\ 1 & \pi < x \end{cases}$$

(ii) $$F(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \max\left\{0, \min\left\{x^2 + bx + c\right\}\right\} & x \ge 0 \end{cases}$$

HINWEIS: Überprüfen Sie $(F1)$ bis $(F3)$.

(12 Punkte)

---

b.w.

3. *"Nichtalterungseigenschaft"*

Es sei T die zufällige Lebensdauer eines Aggregates. Man nimmt an, T sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$P(T \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})\, 1_{[0,\infty)}(t), \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Man zeige, daß die folgende "Nichtalterungseigenschaft" gilt:

$$P(T \leq t + s \mid T \geq s) = P(T \leq t), \quad (s, t \geq 0).$$

(5 Punkte)

---

4. *Geburtstagsaufgabe*

Ein Student löst die "Geburtstagsaufgabe" so:

Es existieren $\binom{365 + s - 1}{s}$ Möglichkeiten, die Geburtstage der s Schüler über das Jahr (mit 365 Tagen) zu verteilen; weiterhin existieren $\binom{365}{s}$ Möglichkeiten, sie so zu verteilen, daß keine 2 Geburtstage auf denselben Tag fallen. Somit ist die Wahrscheinlichkeit p dafür, daß keine 2 Schüler an demselben Tag Geburtstag haben

$$p_s = \binom{365}{s} \binom{365 + s - 1}{s}^{-1}.$$

Man überlege sich, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen diese Lösung falsch (richtig) ist und diskutiere die entsprechenden Vorausssetzungen.

HINWEIS: Es genügt, den Fall einer Klasse mit 2 Schülern zu betrachten.
Geben Sie unter Verwendung ein- und derselben Menge von Elementarereignissen konkrete Wahrscheinlichkeitsräume für beide Lösungen an.

(12 Punkte)

Abgabe: bis 1.12.04 9.00 Uhr   Kasten 124 (grün)

Besprechung und Rückgabe: in den Übungen ab 8.12.04

Hinweis::*Geben Sie außer Ihrem Namen auch Ihre Übungsgruppe mit an.*