- Dietz - **- WS 2004/05 -**

Übungsaufgaben zur
"Stochastik für Informatiker"
Serie 12.

---

1. *Čebyšev-Ungleichung*

   Ein nicht notwendig idealer Würfel werde N mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einem einzelnen Wurf eine Sechs zu werfen, werde mit p ($\in [0, 1]$) bezeichnet. Man interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit q dafür, daß die Gesamtzahl S der in diesen N Würfen geworfenen Sechsen nicht kleiner als eine gegebene Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $Np < k \leq N$ ist.

   (i) Geben Sie eine Formel an, mit deren Hilfe q exakt errechnet werden kann.

   (ii) Wie läßt sich mit Hilfe der Čebyšev-Ungleichung eine obere Schranke für q ermitteln?

   (iii) Vergleichen Sie den unter (i) ermittelten exakten Wert mit der gemäß (ii) gewonnenen Schranke im Fall $N = 10$, $p = \frac{1}{5}$ und $k = 8$!

   (8 Punkte)

---

2. *Markov-Ungleichung II.*

   Es seien X eine Zufallsgröße mit endlicher Streuung und $y > 0$ eine gegebene Konstante. Zeigen Sie, daß folgende Ungleichungen gelten:

   (a) $P(X - EX \geq y) \leq \frac{E|X-EX|}{y}$

   (b) $P(X - EX \geq y) \leq \frac{E(X-EX)^+}{y}$.

   (Dabei bezeichnet x^+ für jede reelle Zahl x deren Positivteil:

   $$x^+ := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.)} \end{cases}$$

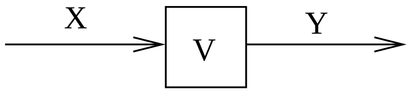
   (6 Punkte)

---

b.w.

3. *Spannung*

Wird an den Eingang eines Verstärkers V die (zufällige) Spannung X gelegt, müßte am Ausgang theoretisch die Spannung aX erscheinen (a bezeichnet den Verstärkungsfaktor), praktisch erscheint jedoch die etwas verrauschte Spannung Y:



Für welchen Wert von $a \in I\!R$ wird der mittlere quadratische Fehler zwischen aX und Y, d.h.,

$$\Delta(a) := E(Y - aX)^2$$

am kleinsten? Wie groß ist der kleinstmögliche Wert von $\Delta(a)$?

(Sie können X, $Y \in \mathcal{L}_2$ annehmen.)

(6 Punkte)

Abgabe: bis 19.01.05 9.00 Uhr   Kasten 124 (grün) **(Aufgabe 2: ZÜ am 21.01.05)**

Besprechung und Rückgabe: in den Übungen ab 21.01.05

Hinweis: *Geben Sie außer Ihrem Namen auch Ihre Übungsgruppe mit an.*