§ 22 . Diagonalisierbare Endomorphismen und Matrizen

Wir wollen untersuchen, wann es für einen Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ eine Basis B von V gibt, so daß $\mathrm{M}_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

(22.1) DEF: a) Sei V ein endlichdimensionaler K–Vektorraum. Ein K–Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis B von V gibt, so daß die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

b) Eine Matrix $M \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn M zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

(22.2) BEM: a) $M \in \mathrm{M}_n(K)$ diagonalisierbar $\iff$ $f_M : K^n \longrightarrow K^n$ diagonalisierbar.

b) Das charakteristische Polynom einer Diagonalmatrix $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist

$$p_D = \begin{vmatrix} \lambda_1 - T & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n - T \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - T) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i)$$

Hier stehen also die Eigenwerte von D in der Haupdiagonalen, und es gilt $\det(D) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ und $\mathrm{spur}(D) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

c) $M \approx \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \implies p_M = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i)$ nach (20.17a).

d) Ist $f \in \mathrm{End}_K(V)$ diagonalisierbar mit $\mathrm{M}_B^B(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, so folgt nach (20.18) $p_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i)$, und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind alle Eigenwerte von f. Insbesondere zerfällt hier das charakteristische Polynom in Linearfaktoren.

e) f (bzw. M) diagonalisierbar $\implies$ f (bzw. M) trigonalisierbar.

(22.3) LEMMA: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ paarweise verschiedene Eigenwerte von $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{s} \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$$

(22.4) SATZ: Sei V ein endlichdimensionaler K–Vektorraum. Für einen K–Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) f ist diagonalisierbar.

b) Es gibt eine Basis B von V, die aus Eigenvektoren von f besteht, eine sog. **Eigenbasis** von V.

c) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ alle (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von f, so gilt $V = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$.

d) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ alle (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von f, so gilt $V = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$.

(22.5) LEMMA: Sei $\dim_K(V) = n$. Dann gilt für einen Eigenwert $\lambda \in K$ von $f \in \mathrm{End}_K(V)$

$$1 \leq \dim_K(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) \leq \mu(p_f, \lambda) \leq n\,.$$

Hierbei heißt $\dim_K(\mathrm{Eig}(f, \lambda))$ die **geometrische** und $\mu(p_f, \lambda)$ die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwertes λ.

(22.6) SATZ: Sei V ein n–dimensionaler K–Vektorraum ($n \in \mathbb{N}$). Für einen K–Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) f ist diagonalisierbar

b) Das charakteristische Polynom p_f von f zerfällt in $K[T]$ in Linearfaktoren, und für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ von f gilt

$$\dim_K(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) \;=\; \mu(p_f, \lambda)$$

(22.7) BEISPIELE: **a)** Die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ besitze die Darstellungsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$p_f \;=\; p_M \;=\; \det(M - TE_3) \;=\; \begin{vmatrix} -T & -1 & 1 \\ -3 & -2-T & 3 \\ -2 & -2 & 3-T \end{vmatrix} \;=\; -T^3 + T^2 + T - 1 \;=$$

$$(T^2 - 1)(1 - T) \;=\; \underline{-(T-1)^2(T+1)}\,.$$

Damit zerfällt p_f in Linearfaktoren, und f ist nach (21.5) trigonalisierbar. Die Eigenwerte von f sind 1 (zweifach) und -1 (einfach). Außerdem ist

$\dim_{\mathbf{R}}(\mathrm{Eig}(f, 1) \;=\; 3 - \mathrm{rg}(M - E_3) \;=\; 2 \;=\; \mu(p_f, 1)$ und

$\dim_{\mathbf{R}}(\mathrm{Eig}(f, -1) \;=\; 3 - \mathrm{rg}(M + E_3) \;=\; 1 \;=\; \mu(p_f, -1)$.

Damit ist f nach (22.6) diagonalisierbar. Wählt man eine Basis B von $\mathbb{R}^3$, die aus 3 linear unabhängigen Eigenvektoren von f besteht, so gilt

$$\mathrm{M}_B^B(f) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

und M ist ähnlich zu $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$.

b) Die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ besitze die Darstellungsmatrix $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Dann gilt: $p_g \;=\; p_N \;=\; \det(N - TE_3) \;=\; \begin{vmatrix} -T & 1 & 0 \\ 0 & -T & 2 \\ 0 & 0 & -T \end{vmatrix} \;=\; (-T)^3$, also zerfällt p_g in Linearfaktoren, und hat 0 als dreifache Nullstelle. Damit ist g nach (21.5) trigonalisierbar. Jedoch gilt $\dim_{\mathbf{R}}(\mathrm{Eig}(g, 0)) = 3 - \mathrm{rg}(N) = 1 \neq 3 = \mu(p_g, 0)$, so daß g **nicht** diagonalisierbar ist.