§19. Determinanten

Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Dann wollen wir die folgenden Fragen untersuchen:

- Wie läßt sich entscheiden, ob A invertierbar ist?
- Wie läßt sich ggfs. die inverse Matrix bestimmen?
- Wie läßt sich der Rang von A bestimmen?
- Wie läßt sich ein LGS mit A als Koeffizientenmatrix lösen?

Über die bereits bekannten Verfahren hinaus wollen wir hier eine andere Methode behandeln. Dabei wird der Matrix A ihre sog. **Determinante** zugeordnet. Diese Determinante ist ein Skalar und enthält wesentliche Informationen über die Matrix. Damit können dann auch die oben gestellten Fragen beantwortet werden.

Die Spezialfälle $n = 2$ und $n = 3$ haben wir schon früher kennengelernt. Wir schauen uns den ersten Fall aber noch etwas genauer an, um die wichtigsten Eigenschaften der Determinante herauszuarbeiten, die wir dann später verallgemeinern werden.

Der Fall $n = 2$:

Sei
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(K)$$

Nach Aufgabe 44 (Lin.Alg. I) gilt: A invertierbar $\iff$ $ad - bc \neq 0$.

Damit läßt sich an dieser skalaren Größe $ad - bc$ ablesen, ob etwa die Spalten von A linear unabhängig sind. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\det(A) := ad - bc \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

Auch im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen tritt diese Größe auf:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Im Falle $\underline{\underline{ad - bc \neq 0}}$ ist $(*)$ eindeutig lösbar, und es gilt:

$$x_1 = \frac{de - bf}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad , \quad x_2 = \frac{af - ce}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Dies ist ein Spezialfall der sog. **Cramer'schen Regel**.

Im folgenden listen wir Eigenschaften von (2×2)–Determinanten auf, die für das Weitere wegweisend sind:

(1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$, d.h. die Determinante der Einheitsmatrix ist 1.

(2) $\det \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = ac - ac = 0$, d.h. $\det(A) = 0$, wenn 2 Spalten von A gleich sind.

(3) $\det \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, d.h. es ändert sich das Vorzeichen von $\det(A)$, wenn 2 Spalten von A vertauscht werden.

(4) $\det \begin{pmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{pmatrix} = (a+a')d - b(c+c') = (ad - bc) + (a'd - bc') =$

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} ra & b \\ rc & d \end{pmatrix} = rad - rbc = r(ad - bc) = r \cdot \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(5) Faßt man die Determinante als eine Abbildung der Spalten auf, d.h.

$$\det : K^2 \times K^2 \longrightarrow K ,$$

so ist det nach (4) im ersten Argument K–linear. Dasselbe gilt auch für das zweite Argument. Man sagt, daß det K–**bilinear** ist. (2) besagt, daß det **alternierend** ist, und (3), daß det **schiefsymmetrisch** ist. Es wird sich später herausstellen, daß die 4 Eigenschaften (1) – (4) die Determinante einer (2×2)–Matrix vollständig charakterisieren.

(6) $\det \begin{pmatrix} a+rb & b \\ c+rd & d \end{pmatrix} = (a+rb)d - b(c+rd) = ad + rbd - bc - rbd = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

d.h. $\det(A)$ ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte von A ein Vielfaches der anderen Spalte addiert.

(7) $\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0 \cdot d - b \cdot 0 = 0$, d.h. $\det(A) = 0$, falls A eine Nullspalte enthält.

(8) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$, falls die Spalten von A linear unabhängig sind.

(9) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$, falls die Spalten von A linear abhängig sind.

(10) $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - cb = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, d.h. $\det({}^tA) = \det(A)$.

Hier bezeichnet ${}^tA$ die zu A **transponierte Matrix**, die aus A durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen entsteht.

(11) Da die Spalten der transponierten Matrix ${}^tA$ gerade die Zeilen von A sind, besitzt $\det(A)$ auch die entsprechenden Eigenschaften in Bezug auf die Zeilen.

(12) Es gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ für zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_2(K)$

Dies ist der sog. **Determinantenproduktsatz**.

Der Fall $n = 3$:

Auch für (3×3)–Matrizen über $\mathbb{R}$ haben wir schon die Determinante als Spatprodukt im Anschauungsraum kennengelernt. Für eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

die aus den 3 Spaltenvektoren $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}^3$ aufgebaut sein soll, gilt

A invertierbar $\iff$ $\{s_1, s_2, s_3\}$ linear unabhängig $\iff$ das Spatprodukt (s_1, s_2, s_3) ist $\neq 0$.

Das Spatprodukt berechnet sich folgendermaßen:

$$(s_1, s_2, s_3) = (s_2, s_3, s_1) = \langle s_2 \times s_3, s_1 \rangle = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \underline{\underline{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \; =: \; \det(A)}}$$

Durch diesen letzten Ausdruck kann die Determinante einer (3×3)–Matrix definiert werden. Es wird also die Berechnung der Determinante einer (3×3)–Matrix auf die Berechnung der Determinanten von drei (2×2)–Matrizen zurückgeführt. Man sagt hier, daß $\det(A)$ durch **Entwicklung nach der ersten Spalte** berechnet wird. Dieses Verfahren werden wir später verallgemeinern.

Auch hier gelten die im Falle $n = 2$ aufgelisteten Eigenschaften, was im einzelnen nachgeprüft werden muß . Für ein LGS $Ax = d$ $(\in \mathbb{R}^3)$ hatten wir schon früher die Cramer'sche Regel kennengelernt: im Falle $\det(A) \neq 0$ ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit

$$x_1 = \frac{(d, s_2, s_3)}{\det(A)} \quad , \quad x_2 = \frac{(s_1, d, s_3)}{\det(A)} \quad , \quad x_3 = \frac{(s_1, s_2, d)}{\det(A)}$$

die eindeutig bestimmte Lösung von $Ax = d$.

Ziel: Wir wollen einer quadratischen Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine skalare Größe $\det(A) \in K$ zuordnen, an der man u.a. ablesen kann, ob A invertierbar ist oder nicht, d.h. es soll gelten:

$$A \text{ invertierbar} \iff \det(A) \neq 0$$

Determinantenformen

Wir wollen zunächst Determinantenformen auf Vektorraäumen durch allgemeine Eigenschaften definieren, die wir in den vorherigen Beispielen vorgefunden haben.

(19.1) DEF: Seien V ein K–Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $f : V^n \longrightarrow K$ eine Abbildung.

a) f heißt n–**linear** (oder eine n–**Linearform auf** V), wenn für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt:

$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n)$

$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, a \cdot v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = a \cdot f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$

für alle $v_1, \ldots, v_i, v_i', \ldots, v_n \in V$, $a \in K$.

b) f heißt **alternierend**, wenn gilt:

$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k, \ldots, v_n) = 0_K$, falls $v_i = v_k$ für $i \neq k$

c) f heißt **schiefsymmetrisch**, wenn gilt:

$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$ für $i \neq k$.

(19.2) BEM: **a)** Es sei $f : V^n \longrightarrow K$ eine n–lineare Abbildung, und es sei $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ein fester Index. Ferner seien $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$ feste Vektoren aus V. Dann definiert f eine Abbildung $f_k : V \longrightarrow K$ durch

$$f_k(v) := f(v_1, \ldots, v_{k-1}, v, v_{k+1}, \ldots, v_n) \quad (\forall\, v \in V)$$

Diese Abbildung f_k ist nach Definition der n–Linearität eine K–lineare Abbildung. Insbesondere gilt $f_k(o_V) = 0_K$, d.h. es ist

$$f(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n) = 0_K \quad \text{falls } v_k = o_V \text{ für ein } k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

b) Seien $V := \mathbb{R}^3$, $f : V^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(v, w) := \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$ für $v = (a_i), w = (b_i) \in \mathbb{R}^3$. Diese Abbildung f ist 2–linear (oder bilinear), und es gilt $f(v, w) = f(w, v)$ $(\forall\, v, w \in V)$. f heißt deswegen **symmetrisch**.

c) $V := \mathbb{R}^2$, $f : V^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(v, w) := a_1 b_2 - a_2 b_1$.

f ist dann 2–linear, alternierend und schiefsymmetrisch. Ist nämlich $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ die Matrix mit den Spalten v und w, so gilt gerade $f(v, w) = \det(A)$.

d) Die Menge der n–linearen (alternierenden bzw. schiefsymmetrischen) Abbildungen von V^n nach K ist ein Unterraum des K–Vektorraumes $\mathcal{A}(V^n, K)$ aller Abbildungen von V^n nach K.

(19.3) SATZ: Für eine alternierende n–lineare Abbildung $f : V^n \longrightarrow K$ gilt:

a) $f(v_1, \ldots, v_i + a v_k, \ldots, v_k, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k, \ldots, v_n)$ für $i \neq k, a \in K$

b) f ist schiefsymmetrisch

c) Ist $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ linear abhängig, so folgt $f(v_1, \ldots, v_n) = 0_K$

d) $\dim_K(V) < n \implies f = o$ (Nullabbildung)

(19.4) LEMMA: Sei $f : V^n \longrightarrow K$ eine schiefsymmetrische Abbildung und $\pi \in S_n$ eine Permutation. Dann gilt

$$f(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)}) = \pm f(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

(19.5) SATZ: $f : V^n \longrightarrow K$ sei eine alternierende n–lineare Abbildung, und $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sei eine Basis von V. Dann gilt

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0_K \quad \Longrightarrow \quad f = o \quad \text{(Nullabbildung)}$$

(19.6) DEF: V sei ein K–Vektorraum der Dimension n. Eine Abbildung $d : V^n \longrightarrow K$ heißt eine **Determinantenform auf** V, wenn gilt:

a) d is n–linear und alternierend

b) $d \neq o$.

(19.7) FOLG: V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum und $d : V^n \longrightarrow K$ eine Determinantenform auf V. Für Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $d(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0_K$

b) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist linear unabhängig

c) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V .

(19.8) LEMMA: V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum und $d : V^n \longrightarrow K$ eine Determinantenform auf V. Ist dann f eine beliebige alternierende n–lineare Abbildung, so gibt es genau ein $a \in K$ mit $f = ad$.

(19.9) SATZ: Eindeutigkeitssatz für Determinantenformen

V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum mit einer Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Dann gibt es **höchstens** eine Determinantenform d auf V mit

$$d(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1_K$$

(19.10) SATZ: Existenzsatz für Determinantenformen

V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum mit einer Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Dann gibt es (genau) eine Determinantenform d auf V mit

$$d(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1_K$$

(19.11) FOLG: Sei $V := K^n$ und $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis von K^n. Dann existiert genau eine Determinantenform $d_n : V^n \longrightarrow K$ mit

$$d_n(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1_K$$