Wir führen nun lineare Abbildungen als "strukturverträgliche" Abbildungen zwischen Vektorräumen ein. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_{m,n}(\boldsymbol{K})$ eine beliebige Matrix. Wir definieren eine Abbildung

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m \quad , \quad f_A(v) := Av \quad (\forall\, v \in K^n)$$

Nach (9.7) gilt dann

$$f_A(v+v') \;=\; f_A(v) + f_A(v') \quad (\forall\, v, v' \in K^n)$$

$$f_A(\alpha v) \;=\; \alpha f_A(v) \quad (\forall\, \alpha \in K\,,\ \forall\, v \in K^n)$$

Wir nehmen dies als Anlass für die folgende Definition:

(17.18) DEF: $\boldsymbol{K}$ sei ein beliebiger Körper. $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ seien Vektorräume über $\boldsymbol{K}$. Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt **K–linear** (oder kurz **linear** oder auch **K–Homomorphismus**), wenn gilt:

L$_1$) $f(v+v') \;=\; f(v) + f(v') \quad (\forall\, v, v' \in V)$

L$_2$) $f(\alpha\, v) \;=\; \alpha\, f(v) \quad (\forall\, \alpha \in K\,,\ \forall\, v \in V)$.

Die Menge aller $\boldsymbol{K}$–linearen Abbildungen von $\boldsymbol{V}$ nach $\boldsymbol{W}$ wird mit $\mathbf{Hom}_K(V, W)$ bezeichnet.

(17.19) Beispiele: **a)** Jede Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_{m,n}(\boldsymbol{K})$ definiert durch die Vorschrift

$$f_A(v) := Av \quad (\forall\, v \in K^n)$$

eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^m$.

b) Ist $\boldsymbol{V}$ ein $\boldsymbol{K}$–Vektorraum, so ist die Identität $\mathbf{id}_V : V \longrightarrow V$ eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung.

c) Sind $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ $\boldsymbol{K}$–Vektorräume, so ist die Nullabbildung $o : V \longrightarrow W \;,\; v \longmapsto o_W$, eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung.

d) Ist $\boldsymbol{V}$ ein $\boldsymbol{K}$–Vektorraum, so heißt eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $V \longrightarrow K$ auch eine **K–Linearform auf V**.

e) Sind $\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}, \boldsymbol{W}$ $\boldsymbol{K}$–Vektorräume, so heißt eine Abbildung $f : V_1 \times V_2 \longrightarrow W$ **K–bilinear**, wenn $\boldsymbol{f}$ in jedem Argument $\boldsymbol{K}$–linear ist.

(17.20) SATZ: **Eigenschaften linearer Abbildungen**

$\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ seien $\boldsymbol{K}$–Vektorräume über einem beliebigen Körper $\boldsymbol{K}$. Für eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ gilt:

a) $f(o_V) = o_W$

b) $f(-v) = -f(v)$ für alle $v \in V$

c) $f(v - v') = f(v) - f(v')$ für alle $v, v' \in V$

d) $f(av + a'v') = af(v) + a'f(v')$ für alle $a, a' \in K, v, v' \in V$

e) $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f(v_i) \quad (\forall\, a_i \in K, v_i \in V)$.

(17.21) LEMMA: Sind V und W K–Vektorräume über einem beliebigen Körper K, so ist $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ein Untervektorraum des K–Vektorraumes $\mathcal{A}(V,W)$ aller Abbildungen von V nach W.

(17.22) LEMMA: Sind $f : V \longrightarrow W$ und $g : W \longrightarrow X$ K–lineare Abbildungen, so ist auch die Hintereinanderausführung $g \circ f : V \longrightarrow X$ K–linear. (Beweis s. Aufgabe 22)

(17.23) DEF: Für eine K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ definiert man:

a) **Kern**$(f) := \{ v \mid v \in V \, , \, f(v) = o_W \} \subseteq V$

b) **Bild**$(f) := \{ f(v) \mid v \in V \} \subseteq W$.

(17.24) SATZ: Für eine K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ gilt:

a) $U \subseteq V$ Untervektorraum $\Longrightarrow$ $f(U) \subseteq W$ Unterraum

b) $X \subseteq W$ Untervektorraum $\Longrightarrow$ $f^{-1}(X) \subseteq V$ Unterraum.

(17.25) FOLG: Ist $f : V \longrightarrow W$ eine K–lineare Abbildung, so gilt:

a) Bild$(f) = f(V)$ ist ein Untervektorraum von W

b) Kern$(f) = f^{-1}(\{0_W\})$ ist ein Untervektorraum von V.

(17.26) SATZ: Für eine K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ gilt:

a) f injektiv $\Longleftrightarrow$ Kern$(f) = 0$

b) f surjektiv $\Longleftrightarrow$ Bild$(f) = W$.

(17.27) DEF: V und W seien K–Vektorräume über einem beliebigen Körper K.

a) Eine injektive K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt ein K–**Monomorphismus** von V nach W.

b) Eine surjektive K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt ein K–**Epimorphismus** von V auf W.

c) Eine bijektive K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt ein K–**Isomorphismus** von V auf W.

d) V heißt K–**isomorph** zu W (in Zeichen: $V \cong_K W$ oder kurz: $V \cong W$), wenn es einen K–Isomorphismus von V auf W gibt.

(17.28) LEMMA: $\boldsymbol{V, W}$ und $\boldsymbol{X}$ seien $\boldsymbol{K}$–Vektorräume über einem beliebigen Körper $\boldsymbol{K}$.

a) $\mathbf{id}_{\boldsymbol{V}} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ ist ein $\boldsymbol{K}$–Isomorphismus.

b) Ist $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ ein $\boldsymbol{K}$–Isomorphismus, so ist auch $\boldsymbol{f^{-1}} : \boldsymbol{W} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ ein $\boldsymbol{K}$–Isomorphismus.

c) Sind $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ und $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{W} \longrightarrow \boldsymbol{X}$ $\boldsymbol{K}$–Isomorphismen, so ist auch die Hintereinanderausführung $\boldsymbol{g \circ f} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{X}$ ein $\boldsymbol{K}$–Isomorphismus.

(17.29) FOLG: Für $\boldsymbol{K}$–Vektorräume $\boldsymbol{V, W, X}$ gilt:

a) $\boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{V}$ (Reflexivität)

b) $\boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{W} \implies \boldsymbol{W} \cong \boldsymbol{V}$ (Symmetrie)

c) $\boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{W} \wedge \boldsymbol{W} \cong \boldsymbol{X} \implies \boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{X}$ (Transitivität).

(17.30) SATZ: $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ sei eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung und $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{V}$ eine beliebige Teilmenge. Dann gilt:

a) Ist $\boldsymbol{f}$ injektiv und ist $\boldsymbol{T}$ linear unabhängig, so ist $\boldsymbol{f(T)}$ linear unabhängig

b) Ist $\boldsymbol{E}$ ein EZS von $\boldsymbol{V}$, so ist $\boldsymbol{f(E)}$ ein EZS von Bild$(\boldsymbol{f})$

c) Ist $\boldsymbol{f}$ surjektiv und ist $\boldsymbol{E}$ ein EZS von $\boldsymbol{V}$, so ist $\boldsymbol{f(E)}$ ein EZS von $\boldsymbol{W}$

d) Ist $\boldsymbol{f(T)}$ ein EZS von $\boldsymbol{W}$, so ist $\boldsymbol{f}$ surjektiv.

(17.31) FOLG: $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ sei ein $\boldsymbol{K}$–Isomorphismus. Ist dann $\boldsymbol{V}$ endlichdimensional, so ist auch $\boldsymbol{W}$ endlichdimensional, und es gilt $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{V}) = \mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{W})$

(17.32) LEMMA: $\boldsymbol{f, g} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ seien $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildungen, und $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{V}$ sei ein EZS von $\boldsymbol{V}$. Gilt dann $\boldsymbol{f(e) = g(e)}$ für alle $\boldsymbol{e \in E}$, so folgt $\boldsymbol{f = g}$.
Oder anders formuliert: $\boldsymbol{f|E = g|E} \implies \boldsymbol{f = g}$.

(17.33) SATZ über lineare Fortsetzung:

$\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ seien $\boldsymbol{K}$–Vektorräume über einem beliebigen Körper $\boldsymbol{K}$, und $\boldsymbol{B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}}$ sei eine Basis von $\boldsymbol{V}$. Zu beliebig vorgegebenen Vektoren $\boldsymbol{w_1, w_2, \ldots, w_n \in W}$ gibt es dann genau eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ mit der Eigenschaft $\boldsymbol{f(v_i) = w_i}$ für alle $\boldsymbol{i \in \{1, 2, \ldots, n\}}$.

Fazit: Um eine lineare Abbildung $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ zu definieren, braucht man die Zuordnungsvorschrift **nur** für die Elemente einer (endlichen) Basis von $\boldsymbol{V}$ anzugeben. Durch **lineare Fortsetzung** ist die Abbildung dann auf ganz $\boldsymbol{V}$ definiert.