§16 Vektorräume über beliebigen Körpern

Es stellt sich heraus, daß es bei den bisherigen Untersuchungen von Vektorräumen (mit Ausnahme der euklidischen Vektorräume) eigentlich überhaupt keine Rolle spielte, daß der Skalarbereich die Menge der reellen Zahlen war. Ausschlaggebend war allein die Tatsache, daß es sich bei $\mathbb{R}$ um einen Körper handelt. Daher verallgemeinern wir im folgenden den Vektorraum–Begriff. Ein weiterer Grund dafür liegt darin, daß man bei vielen Anwendungen nicht mit Vektorräumen über $\mathbb{R}$ auskommt, sondern etwa Vektorräume über endlichen Körpern benötigt.

(16.1) DEF: K sei ein beliebiger Körper und V eine Menge. $(V, +, \cdot_K)$ heißt ein **Vektorraum über K** (oder ein **K–Vektorraum**), wenn folgendes gilt:

V_1) $+$ ist eine Verknüpfung auf V (genannt Addition), so daß $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

V_2) $\cdot_K$ ist eine Skalarmultiplikation auf V $(K \times V \ni (\alpha, v) \longmapsto \alpha\, v \in V)$ die folgende Eigenschaften besitzt:

1) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$

2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

3) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

4) $1_K v = v$

Hierbei sind $v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in K$ beliebige Elemente.

(16.2) Beispiele: K sei ein beliebiger Körper.

a) Die Menge K^n der n–Tupel von Elementen aus K ist ein K–Vektorraum, wobei die Verknüpfungen "komponentenweise" definiert sind.

b) Die Menge aller abzählbar unendlichen Folgen von Elementen aus K ist ein K–Vektorraum, wobei die Verknüpfungen "gliedweise" definiert sind.

c) Die Menge $\mathcal{A}(M, K)$ aller Abbildungen von einer beliebigen Menge $M \neq \emptyset$ nach K ist ein K–Vektorraum, wobei die Verknüpfungen "argumentweise" definiert sind.

(16.3) VEREINBARUNG: Alle Begriffsbildungen aus den Paragraphen 9–13 werden sinngemäß auf beliebige Körper bzw. auf Vektorräume über beliebigen Körpern übertragen.

(16.4) META–SATZ: Alle Ergebnisse aus den Paragraphen 9–13 gelten sinngemäß für Vektorräume über beliebigen Körpern.

Insbesondere lassen sich die Überlegungen zur **Dimension** eines Vektorraumes vollständig übertragen:

Die Dimension eines endlich–erzeugbaren $\boldsymbol{K}$–Vektorraumes $\boldsymbol{V}$ ist gleich der Anzahl der Elemente einer beliebigen Basis $\boldsymbol{B}$ von $\boldsymbol{V}$ in Zeichen

$$\mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{V}) = |\boldsymbol{B}|$$

Mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz läßt sich nachweisen, daß je zwei Basen von $\boldsymbol{V}$ gleichviel Elemente haben, so daß der Dimensionsbegriff wohldefiniert ist.

(16.5) Beispiele: $\boldsymbol{K}$ sei ein beliebiger Körper .

a) $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{K}^n) = \boldsymbol{n}$

b) $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\mathrm{M}_{\boldsymbol{m,n}}(\boldsymbol{K})) = \boldsymbol{m \cdot n}$

c) $\mathbf{dim}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathbf{1}$, $\mathbf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \mathbf{2}$

d) $\mathbf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbf{1}$, $\mathbf{dim}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$.