D) Körper

(15.30) DEF: Ein Ring $(K, +, \cdot)$ heißt ein **Schiefkörper**, wenn gilt:

1) $1_K \neq 0_K$ **2)** $K^\star = K \setminus \{0_K\}$

Ist darüberhinaus die Multiplikation kommutativ, so heißt $(K, +, \cdot)$ ein **Körper**.

Bem.: Ist K ein Schiefkörper, so ist $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ eine Gruppe.

(15.31) BEM: **a)** $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Körper.

b) $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$ sind (endliche) Körper.

c) Jeder Unterring eines Schiefkörpers ist nullteilerfrei. Insbesondere ist jeder Schiefkörper nullteilerfrei.

d) Beispiele für nichtkommutative Schiefkörper treten erst später auf.

(15.32) SATZ: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Der Ring $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ ist ein Körper

b) Der Ring $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ ist ein IB

c) n ist eine Primzahl.

(15.33) DEF: Sei K ein Schiefkörper. Eine Unterring $U \subseteq K$ heißt ein **Unterkörper** von K, wenn gilt: $\forall\, x \in U \setminus \{0_K\} \,:\, x^{-1} \in U$

BEM: Ein Unterkörper $U \subseteq K$ ist für sich betrachtet wieder ein Schiefkörper. Seine Verknüpfungen sind die Einschränkungen der Verknüpfungen von K auf U.

Beispiele: $\mathbb{Q}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$, $\{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$.

BEM: Aus jeder positiven reellen Zahl a läßt sich immer die n–te Wurzel ziehen ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$), d.h. die Gleichung $x^n = a$ ist in $\mathbb{R}$ lösbar. Anders sieht es dagegen bei negativen Zahlen aus. Ist $a \in \mathbb{R}$ eine negative reelle Zahl ($a < 0$), so besitzt die Gleichung $x^2 = a$ **keine** Lösung in $\mathbb{R}$, d.h. es gibt keine Quadratwurzel aus einer negativen reellen Zahl. Insbesondere ist die Gleichung $x^2 = -1$ in $\mathbb{R}$ **nicht** lösbar. Wir werden im folgenden $\mathbb{R}$ zu dem Bereich der komplexen Zahlen erweitern, in dem all diese Gleichungen Lösungen besitzen.

(15.34) SATZ: Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \}$ ist bzgl. der Rechenoperationen

$$(a,b) \oplus (a',b') := (a+a', b+b') \qquad \text{(Addition)}$$
$$(a,b) \odot (a',b') := (aa'-bb', ab'+a'b) \qquad \text{(Multiplikation)}$$

ein Körper. Dieser Körper heißt **Körper der komplexen Zahlen** und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Bei Identifizierung der Zahlen $(a,0) \in \mathbb{C}$ mit $a \in \mathbb{R}$ wird $\mathbb{R}$ zu einer Teilmenge und damit zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$.

Bew: $\oplus$ ist eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf $\mathbb{C}$
$0_{\mathbb{C}} := (0,0) \in \mathbb{C}$ ist das neutrale Element bzgl. $\oplus$
$(-a,-b) \in \mathbb{C}$ ist das Inverse von $(a,b) \in \mathbb{C}$ bzgl. $\oplus$

$\odot$ ist eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf $\mathbb{C}$
$1_{\mathbb{C}} := (1,0) \in \mathbb{C}$ ist das neutrale Element bzgl. $\odot$
Sei $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beliebig mit $(a,b) \neq (0,0)$ $(\iff a^2+b^2 \neq 0)$. Dann gilt

$$(a,b) \odot \left(\frac{a}{a^2+b^2} \, , \, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = \left(a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} \, , \, a \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2} \right) =$$
$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \, , \, 0 \right) = (1,0) = 1_{\mathbb{C}}.$$

Damit ist jedes Element $\neq 0_{\mathbb{C}}$ invertierbar bzgl. $\odot$. Da außerdem das Distributivgesetz gilt, ist $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ ein Körper.

Mit den Zahlen der Form $(a,0)$ kann man so rechnen wie mit den reellen Zahlen a:

$$(a,0) \oplus (b,0) = (a+b,0) \quad , \quad (a,0) \odot (b,0) = (a \cdot b, 0)$$

Dies rechtfertigt eine Identifizierung von $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R} \longleftrightarrow \{ (a,0) \mid a \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{C}$$

In $\mathbb{C}$ gibt es das Element $i := (0,1)$. Dieses Element heißt **imaginäre Einheit**. Hierfür gilt

$$i^2 = (0,1)^2 = (0,1) \odot (0,1) = (-1,0) \qquad .$$

Für ein beliebiges $(a,b) \in \mathbb{C}$ folgt dann wegen $(b,0) \odot (0,1) = (0,b)$

$$(\star) \quad (a,b) = (a,0) \oplus (0,b) = (a,0) \oplus [(b,0) \odot (0,1)]$$

Mit der verabredeten neuen Bezeichnungsweise vereinfacht sich $(\star)$ zu

$$(a,b) = (a,0) \oplus [(b,0) \odot (0,1)] = a + b\,i \qquad .$$

Insbesondere ist $i^2 = (-1,0)$, also $\boxed{i^2 = -1}$.
Zusammenfassend erhalten wir das folgende Ergebnis:

(15.35) SATZ: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ läßt sich in der Form $z = a + bi$ mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen $a,b \in \mathbb{R}$ darstellen. Diese Form heißt **arithmetische Darstellung** von z. Dabei ist $i \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $i^2 = -1$.

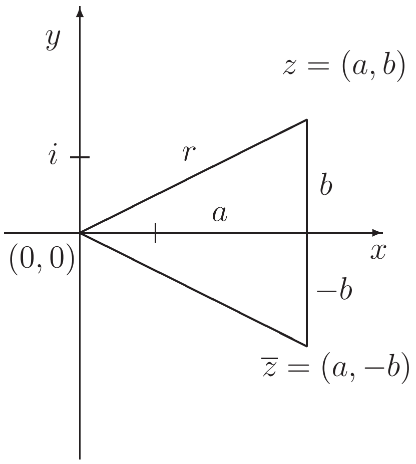
Die Rechenoperationen für komplexe Zahlen in arithmetischer Darstellung lassen sich nun folgendermaßen schreiben:

$(a+bi)+(a'+b'i) \;=\; (a+a')+(b+b')\,i \qquad (a+bi)\cdot(a'+b'i) \;=\; (aa'-bb')+(ab'+ba')\,i$

Im Falle $z \;=\; a+bi \;\neq\; 0$ gilt $\quad z^{-1} \;=\; \dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{-b}{a^2+b^2}\,i$.

Beispiele: $(2+3i)+(1-i)=3+2i$, $(2+3i)(1-i)=5+i$, $\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

Ursprünglich hatten wir die komplexen Zahlen als Elemente aus $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definiert, geometrisch gesehen also als Punkte der Ebene, die man daher auch die **Gauß'sche Zahlenebene** nennt.



Man nennt die x–Achse auch die **reelle Achse** und die y-Achse die **imaginäre Achse**.
Ist $z=a+bi$, so gibt $r=\sqrt{a^2+b^2}$ den Abstand des Punktes z vom Nullpunkt an (Satz von Pythagoras). r heißt der **Betrag** der komplexen Zahl z.
Die Zahl $\overline{z}=a-bi$ entsteht aus z durch Spiegelung an der reellen Achse. Man nennt $\overline{z}$ die zu z **konjugiert komplexe** Zahl.

(15.36) DEF: $z=a+bi \;\; (a,b\in\mathbb{R})$ sei eine komplexe Zahl in arithmetischer Darstellung.

a) $a=:\mathrm{Re}(z)$ heißt der **Realteil** von z und $b=:\mathrm{Im}(z)$ der **Imaginärteil** von z .

b) $|\,z\,|:=\sqrt{a^2+b^2}$ heißt der **Betrag** von z .

c) $\overline{z}:=a-bi$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

Beispiele: $z=3+4i$: $\overline{z}=3-4i$, $\mathrm{Re}(z)=3=\mathrm{Re}(\overline{z})$, $\mathrm{Im}(z)=4$, $\mathrm{Im}(\overline{z})=-4$,
$|\,z\,|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

BEM: **a)** Real– und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind immer **reelle** Zahlen.

Für alle $a,b\in\mathbb{R}$ gilt $a^2+b^2\geq 0$, so daß stets eine Quadratwurzel aus a^2+b^2 existiert. Bei der Definition des Betrages setzen wir verabredungsgemäß voraus, daß wir die **positive** Quadratwurzel meinen, so daß der Betrag eindeutig definiert ist.

b) Für $w,z\in\mathbb{C}$ gilt: $w=z \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Re}(w)=\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(w)=\mathrm{Im}(z)$

(15.37) SATZ: Für komplexe Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

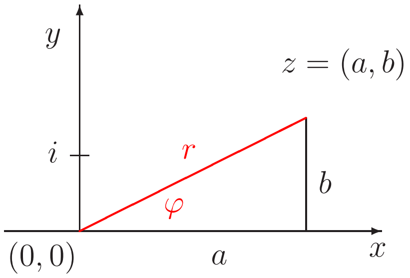
a) $\overline{(\overline{z})} = z$ **b)** $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ **c)** $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$ **d)** $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

Bew: a) Klar

b) Seien $w = a + bi$, $z = c + di$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann hat $w + z$ die arithmetische Darstellung $w + z = (a + c) + (b + d)i$, da $a + c, b + d \in \mathbb{R}$. Also $\overline{w+z} = (a + c) - (b + d)i$. Damit folgt $\overline{w} + \overline{z} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{w+z}$.

c) Analog zu b).

(15.38) BEM: Polarkoordinatendarstellung



Eine komplexe Zahl $z = a + ib \neq 0$ ist eindeutig durch den **Betrag** r (Abstand von z zum Nullpunkt) und das **Argument** φ (Winkel zwischen der positiven x–Achse und dem Vektor von 0 nach z im mathematisch positiven Sinn) bestimmt. Es gilt

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{r} \quad , \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{r}$$

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ &= r\cos(\varphi) + i\,r\sin(\varphi) \\ &= r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\ &= r\,e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Dies ist die sog. Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahl z. Diese eignet sich besonders gut für die Multiplikation, das Potenzieren und das Wurzelziehen.

$z = re^{i\varphi}$, $w = se^{i\psi} \implies$

$$zw = (rs)e^{i\varphi}e^{i\psi} = (rs)e^{i(\varphi+\psi)}$$

Es werden also die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Formel von Moivre:

$$z = r\,e^{i\varphi} \implies z^n = r^n\,e^{i\,n\varphi}$$

Daraus ergibt sich für $w \in \mathbb{C}$, $z = r\,e^{i\varphi} \neq 0$:

$w^n = z$ (d.h. w ist eine n–te Wurzel aus z) $\iff$ $\exists\, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ mit

$$w = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\,\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$