§ 14. Euklidische Vektorräume

Wir wollen hier die Überlegungen aus dem 1. Kapitel weiterführen und verallgemeinern. Der Anschauungsraum trägt nicht nur die algebraische Struktur eines Vektorraumes sondern er trägt auch eine geometrische Struktur, die sich in der Möglichkeit, Winkel und Längen zu messen, wiederspiegelt. Diese Struktur wollen wir auf allgemeinere Vektorräume übertragen.

Grundlage für Längen– und Winkelmessung im Anschauungsraum ist das Skalarprodukt. Wir verallgemeinern zunächst diese Begriffsbildung.

(14.1) DEF: V sei ein beliebiger Vektorraum über dem **Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen**.

a) Eine Abbildung $s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt ein **Skalarprodukt auf** V, wenn gilt

SP$_1$) s ist **$\mathbb{R}$–bilinear**, d.h. für alle $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$s(v_1 + v_2, w) = s(v_1, w) + s(v_2, w) \ , \ s(\alpha\, v, w) = \alpha\, s(v, w)$$
$$s(v, w_1 + w_2) = s(v, w_1) + s(v, w_2) \ , \ s(v, \alpha\, w) = \alpha\, s(v, w)$$

SP$_2$) s ist **symmetrisch**, d.h. $s(v, w) = s(w, v) \ \ \forall\, v, w \in V$.

SP$_3$) s ist **positiv definit**, d.h. $s(v, v) > 0 \ \ \forall\, v \in V \setminus \{o_V\}$.

b) Ist s ein Skalarprodukt auf V, so heißt (V, s) ein **euklidischer $\mathbb{R}$–Vektorraum**.

Bezeichnung: Wir werden häufig ein Skalarprodukt auf V mit $\langle\ ,\ \rangle$ bezeichnen.

(14.2) BEISPIELE: **a)** $V := \mathbb{R}^n$, $v := (a_i)$, $w := (b_i) \in V$. Dann wird durch

$$s(v, w) := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

ein Skalarprodukt definiert. s heißt **kanonisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$**. Im Falle $n = 3$ ist dies gerade das in Kapitel I behandelte Skalarprodukt auf dem Anschauungsraum.

b) Es sei $V := \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}([0, 1], \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller stetigen Abbildungen von dem Intervall $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$. Für $f, g \in V$ sei definiert:

$$\langle f, g\rangle \ := \ \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$

Dann ist $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem (unendlichdimensionalen) $\mathbb{R}$–Vektorraum V.

Wir übertragen nun den Begriff der Länge auf beliebige euklidische Vektorräume.

(14.3) SATZ: $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ sei ein euklidischer Vektorraum. Dann ist für $v \in V$ die **Norm von** v oder die **Länge von** v definiert durch

$$||v|| \ := \ \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Die Norm hat folgende Eigenschaften:

N$_1$) $\forall\, v \in V \ :\ ||v|| \geq 0$ und $||v|| = 0 \iff v = o_V$

N$_2$) $\forall\, a \in \mathbb{R}\, \forall\, v \in V \ :\ ||av|| = |a| \cdot ||v||$

N$_3$) $\forall\, v, w \in V \ :\ ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (**Dreiecksungleichung**).

BEM: Wegen SP$_1$) und SP$_3$) gilt $\langle v, v \rangle \geq 0 \ \ \forall\, v \in V$, so daß die Norm in (14.3) sinnvoll definiert ist.

Zum Beweis der Dreiecksungleichung benötigt man das folgende Ergebnis:

(14.4) SATZ: Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung
Ist $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, so gilt

$$|\langle v, w \rangle| \ \leq \ ||v|| \cdot ||w|| \ \ \forall\, v, w \in V$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $\{v, w\}$ linear abhängig ist.

(14.5) DEF: V sei ein Vektorraum. Eine Abbildung $||\ || : V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Norm** auf V, wenn die drei Bedingungen **N$_1$), N$_2$)** und **N$_3$)** aus (14.3) erfüllt sind. In diesem Falle nennt man $(V, ||\ ||)$ einen **normierten Vektorraum**.

(14.6) DEF: $(V, ||\ ||)$ sei ein normierter Vektorraum. Dann wird der **Abstand** $d(v, w)$ zweier Vektoren $v, w \in V$ definiert durch

$$d(v, w) := ||v - w||$$

(14.7) BEM: Die Abbildung $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $d(v, w) := ||v - w||$ für $v, w \in V$ erfüllt die Eigenschaften einer **Metrik** oder **Abstandsfunktion**, d.h. es gelten die folgenden Eigenschaften:

M$_1$) $d(v, w) \geq 0$ und $d(v, w) = 0 \iff v = w$

M$_2$) $d(v, w) = d(w, v)$

M$_3$) $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$ für alle $u, v, w \in V$.

Seien v, w zwei Vektoren $\neq o_V$ in einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Aus (14.4) ergibt sich

$$-1 \ \leq \ \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| \cdot ||w||} \ \leq 1$$

Daher gibt es genau ein $\varphi \in [\,0, \pi\,]$ mit

$$\cos(\varphi) \;=\; \frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||}$$

Aus diesem Grunde definieren wir:

(14.8) DEF: $(V, \langle\;,\;\rangle)$ sei ein euklidischer Vektorraum. Der Winkel φ zwischen zwei Vektoren $v, w \in V \setminus \{o_V\}$ ist definiert durch

$$\varphi := \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||}\right) \qquad (\varphi \in [0, \pi])$$

Die folgende Definition ist motiviert durch:

$$\langle v, w\rangle = 0 \iff \cos(\varphi) = 0 \iff \varphi = \frac{\pi}{2}$$

(14.9) DEF: $(V, \langle\;,\;\rangle)$ sei ein euklidischer Vektorraum.

a) Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen **orthogonal** , in Zeichen $v \perp w$, wenn $\langle v, w\rangle = 0$ gilt.

b) Sind S, T nichtleere Teilmengen von V, so bedeute $S \perp T$, daß $\langle v, w\rangle = 0$ für alle $v \in S$ und $w \in T$ gilt.

c) $S^{\perp} := \{\, v \mid v \in V, v \perp S\,\}$ heißt das **orthogonale Komplement von** S **in** V .

d) Eine Menge $\{v_i \mid i \in I\}$ heißt ein **Orthonormalsystem (ONS) in** $(V, \langle\;,\;\rangle)$, wenn gilt:

$$\langle v_i, v_k\rangle \;=\; \delta_{ik} \quad \forall\, i, k \in I$$

Dabei bezeichnet δ_{ik} das Kroneckersymbol.

e) Ein Orthonormalsystem in $(V, \langle\;,\;\rangle)$, das auch eine Basis des Vektorraumes V ist, heißt eine **Orthonormalbasis (ONB)** von $(V, \langle\;,\;\rangle)$.

(14.10) LEMMA: $(V, \langle\;,\;\rangle)$ sei ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt:

a) Jedes ONS ist linear unabhängig.

b) Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein ONS in V, so gilt: $\quad v \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(v_1, \ldots, v_n) \iff v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i$

c) Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine ONB in V, so gilt für Vektoren $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \in V$: $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Der nächste Satz beruht auf dem sog. **Orthonormalisierungsverfahren von E. Schmidt**:

(14.11) SATZ: $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ sei ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann läßt sich jedes Orthonormalsystem S zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen.

Beweisidee: Sei $S := \{s_1, \ldots, s_m\}$. Dann ist S nach (14.10a) linear unabhängig. Ergänze im Falle $m < n := \dim_{\mathbf{R}}(V)$ S zu einer Basis $B = \{s_1, \ldots, s_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ von V. Definiere:

$$s'_{m+1} \ := \ v_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \langle v_{m+1}, s_i \rangle \, s_i$$

Dann ist s'_{m+1} ein Vektor $\neq o_V$, der auf allen Vektoren aus S senkrecht steht. Setze

$$s_{m+1} \ := \ \frac{s'_{m+1}}{||s'_{m+1}||}$$

Dann ist $\{s_1, \ldots, s_m, s_{m+1}\}$ ein Orthonormalsystem in V. Setze das Verfahren im Falle $m+1 < n$ entsprechend fort. Nach endlich vielen Schritten ist ein Orthonormalsystem in V mit n Elementen konstruiert, das dann eine Orthonormalbasis von V ist.

(14.12) FOLG: Jeder endlich dimensionale euklidische Vektorraum $V \neq O$ besitzt eine Orthonormalbasis.

(14.13) LEMMA: $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ sei ein euklidischer Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Dann gilt:

a) $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.

b) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$

Bew: Siehe Aufgabe 2.

(14.14) SATZ: Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Dann gilt:

$$V \ = \ U \oplus U^\perp$$

(14.15) FOLG: Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Dann gilt:

$$U \ = \ (U^\perp)^\perp$$

Bew: Siehe Aufgabe 2.