Einschub A) Elementarmatrizen

Wir wollen hier eine Beschreibung des Gauß-Algorithmus mit Hilfe der sog. Elementarmatrizen vornehmen.

(A.1) DEF: Seien $r, s \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r \leq m$ und $1 \leq s \leq n$. Dann heißt die Matrix

$$E_{rs} = (\delta_{ir}\delta_{sk})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ k=1,2,\ldots,n}} \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$$

eine $(m \times n)$–**Basismatrix**.

(A.2) BEM: **a)** Die Matrix E_{rs} hat an der Stelle (r, s) eine 1 und sonst lauter Nullen.

$$E_{rs} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & 1 & \ldots \\ 0 & \vdots & \end{pmatrix} \longleftarrow r\text{–te Zeile}$$

$$\uparrow \; s\text{–te Spalte.}$$

b) $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_{m,n}(K) \implies A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}E_{ik}$

c) $E_{rs} \cdot E_{tu} = \delta_{st}E_{ru} = \begin{cases} O & \text{für } s \neq t \\ E_{ru} & \text{für } s = t \end{cases}$

d) $E_{rs} \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, $A \in \mathrm{M}_{n,p}(K)$

$E_{rs} \cdot A =$

$$r \rightarrow \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & 1 & \ldots \\ 0 & \vdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ a_{s1} & \ldots & a_{sp} \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow r\text{–te Zeile.}$$

$$\uparrow \; s\text{–te Spalte}$$

(d.h. $E_{rs} \cdot A$ hat die s–Zeile von A als r–te Zeile).

e) Analog hat die Produktmatrix $A \cdot E_{rs}$ die r–te Spalte von A als s–te Spalte und sonst lauter Nullen.

(A.3) DEF: Elementarmatrizen

Seien $i, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i, k \leq n$ und $i \neq k$.

a) Die Matrix $V_{ik} := E_n - E_{ii} - E_{kk} + E_{ik} + E_{ki} \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt **Vertauschungsmatrix**.

b) Für $a \in K$ heißt $A_{ik}(a) := E_n + aE_{ik} \in \mathrm{M}_n(K)$ **Additionsmatrix**.

c) Für $a \in K, \underline{a \neq 0}$ heißt $D_i(a) := E_n + (a-1)E_{ii} \in \mathrm{M}_n(K)$ **Multiplikationsmatrix**.

d) Eine **Elementarmatrix** in $\mathrm{M}_n(K)$ ist eine der in a) bis c) definierten Matrizen.

Ausführlicher geschrieben bedeutet dies in den drei Fällen:

a) Vertauschungsmatrizen:

$$V_{ik} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 0 & & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{–te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow k\text{–te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \qquad & \uparrow \\ i\text{–te Spalte} & & k\text{–te Spalte} \end{array} \end{array}$$

b) Additionsmatrizen

$$A_{ik}(a) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 & a & 0 & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{–te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow k\text{–te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \qquad & \uparrow \\ i\text{–te Spalte} & & k\text{–te Spalte} \end{array} \end{array}$$

c) Multiplikationsmatrizen

$$
\begin{array}{cc}
D_i(a) \;=\; \begin{pmatrix}
1 & 0 & & 0 & & & 0 \\
0 & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & \cdots & 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\
 & & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & 0 \\
0 & & & 0 & & 0 & 1
\end{pmatrix} & \leftarrow i\text{–te Zeile} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow & \\
\qquad\qquad\qquad\quad i\text{–te Spalte} &
\end{array}
$$

Beispiele: **a) Vertauschungsmatrizen in $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$:**

$$V_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$V_{12} \cdot A$ entsteht aus A durch Vertauschen der ersten **Zeile** mit der zweiten **Zeile**.

$$A \cdot V_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$A \cdot V_{12}$ entsteht aus A durch Vertauschen der ersten **Spalte** mit der zweiten **Spalte**.

b) Additionsmatrizen in $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A_{13}(a) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a \cdot 7 & 2 + a \cdot 8 & 3 + a \cdot 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$A_{13}(a) \cdot A$ entsteht aus A durch Addition des a–fachen der dritten **Zeile** zur ersten **Zeile**.

$$A \cdot A_{13}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \cdot a + 3 \\ 4 & 5 & 4 \cdot a + 6 \\ 7 & 8 & 7 \cdot a + 9 \end{pmatrix}$$

$A \cdot A_{13}(a)$ entsteht aus A durch Addition des a–fachen der ersten **Spalte** zur dritten **Spalte**.

c) Multiplikationsmatrizen in $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$:

$$D_2(a)\cdot A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a\cdot 4 & a\cdot 5 & a\cdot 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$D_2(a)\cdot A$ entsteht aus A durch Multiplikation der zweiten **Zeile** von A mit a.

$$A\cdot D_2(a) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot a & 3 \\ 4 & 5\cdot a & 6 \\ 7 & 8\cdot a & 9 \end{pmatrix}$$

$A\cdot D_2(a)$ entsteht aus A durch Multiplikation der zweiten **Spalte** von A mit a.

(A.4) SATZ: a) Die Multiplikation einer Matrix A mit einer Elementarmatrix von links bewirkt eine **elementare Zeilenumformung**. Im einzelnen gilt:

$V_{ik}\cdot A$	Vertauschen der i–ten mit der k–ten Zeile von A
$A_{ik}(a)\cdot A$	Addition des a–fachen der k–ten Zeile von A zur i–ten Zeile von A
$D_i(a)\cdot A$	Multiplikation der i–ten Zeile von A mit $a \neq 0$

b) Die Multiplikation einer Matrix A mit einer Elementarmatrix von rechts bewirkt eine **elementare Spaltenumformung**. Im einzelnen gilt:

$A\cdot V_{ik}$	Vertauschen der i–ten mit der k–ten Spalte von A
$A\cdot A_{ik}(a)$	Addition des a–fachen der i–ten Spalte von A zur k–ten Spalte von A
$A\cdot D_i(a)$	Multiplikation der i–ten Spalte von A mit $a \neq 0$

(A.5) SATZ: Eine Elementarmatrix aus $\mathrm{M}_n(K)$ ist invertierbar. Ihr Inverses ist wieder eine Elementarmatrix.

Im einzelnen gilt: $V_{ik}^{-1} = V_{ik}$, $A_{ik}(a)^{-1} = A_{ik}(-a)$, $D_i(b)^{-1} = D_i(b^{-1})$ $(b \neq 0)$

Wir wissen, daß sich jede Matrix durch elementare Zeilenumformungen auf Treppenform transformieren läßt. Dies können wir jetzt folgendermaßen formulieren:

(A.6) SATZ: Zu jeder Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ mit $A \neq O$ gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ mit

$$P\cdot A \;=\; T(A)$$

Dabei ist P ein Produkt von Elementarmatrizen.

Bew: Durch elementare Zeilenumformungen kann A auf Treppenform transformiert werden. Jeder elementaren Zeilenumformung entspricht die Linksmultiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $G_1, G_2, \ldots, G_s \in \mathrm{GL}_m(K)$ mit

$$(\underbrace{G_s \cdot \ldots \cdot G_2 \cdot G_1}_{=:P}) \cdot A \;=\; T(A)\ ,$$

wobei $T(A)$ eine Treppenmatrix ist. Das Produkt invertierbarer Matrizen ist wieder invertierbar, d.h. $P \in \mathrm{GL}_m(K)$.

Beispiel:

Zu der (4×6)–Matrix $\qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,6}(\mathbb{R}).$

gibt es ein Produkt Q von Elementarmatrizen, die elementaren Zeilenumformungen entsprechen, so daß gilt:

$$Q \cdot B \;=\; (\underbrace{D_3(-1) \cdot A_{43}(1) \cdot A_{23}(1) \cdot A_{13}(1) \cdot A_{42}(-1) \cdot A_{32}(-2) \cdot A_{12}(1) \cdot A_{31}(-2) \cdot V_{12}}_{=:Q}) \cdot B \;=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; T(B).$$

Wir kommen nun zu einer Charakterisierung von invertierbaren Matrizen, die insbesondere zu einem Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix führt.

(A.7) SATZ: Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist invertierbar

b) $\mathrm{rg}(A) = n$

c) $T(A) = E_n$ (Einheitsmatrix)

d) A ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

Bew: **a) $\Longrightarrow$ b)** Die durch A definierte lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist ein Isomorphismus, hat also den Rang n. Folglich $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}_K(f_A) = n$.

b) $\Longrightarrow$ c) Ist $\mathrm{rg}(A) = n$ so besteht $T(A)$ aus den n Einheitsvektoren, ist also die Einheitsmatrix.

c) $\Longrightarrow$ d) Es gibt Elementarmatrizen $G_1, \ldots, G_s \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $(G_s \cdot \ldots \cdot G_1) \cdot A = T(A) = E_n$. Folglich ist $A = G_1^{-1} \cdot \ldots \cdot G_s^{-1}$ nach (A.5) ein Produkt von Elementarmatrizen.

d) $\Longrightarrow$ a) A ist als Produkt von invertierbaren Elementarmatrizen selbst auch invertierbar.

(A.8) Ein Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix

Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Durch elementare Zeilenumformungen kann A auf Treppenform gebracht werden. Da A invertierbar ist, gilt $T(A) = E_n$. Es gibt also ein Produkt P von Elementarmatrizen, die den elementaren Zeilenumformungen entsprechen, mit der Eigenschaft

$$P \cdot A \;=\; T(A) \;=\; E_n$$

Daraus folgt

$$A^{-1} \;=\; P \;=\; P \cdot E_n$$

Man erhält also die inverse Matrix A^{-1}, indem man die elementaren Zeilenumformungen, die A auf Treppenform bringen, gleichzeitig auf die Einheitsmatrix anwendet.

Beispiel: Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

A			***E*₃**		
1	1	1	1	0	0
−1	0	1	0	1	0
2	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0
0	1	2	1	1	0
0	−1	−1	−2	0	1
1	0	−1	0	−1	0
0	1	2	1	1	0
0	0	1	−1	1	1
1	0	0	−1	0	1
0	1	0	3	−1	−2
0	0	1	−1	1	1
***E*₃**			***A*⁻¹**		

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$