Musterlösung für Aufgabe 29

29. Aufgabe: V sei ein K–Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ sei eine K–lineare Abbildung mit der Eigenschaft $f \circ f = f$. Ferner seien $U := \mathrm{Kern}(f)$ und $W := \mathrm{Bild}(f)$. Beweise:

a) $\forall\, w \in W \,:\, f(w) = w$ **b)** $\forall\, v \in V \,:\, v - f(v) \in U$

c) Im Falle $f \neq \mathrm{id}_V$ ist f nicht injektiv **d)** $V = U \oplus W$.

Lösung:

a) Für $w \in W = \mathrm{Bild}(f)$ gibt es ein $v \in V$ mit $w = f(v)$. Folglich

$$\underline{f(w)} \;=\; f(f(v)) \;=\; (f \circ f)(v) \;=\; f(v) \;=\; \underline{w}\,.$$

b) $f(v - f(v)) \;=\; f(v) - f(f(v)) \;=\; f(v) - (f \circ f)(v) \;=\; f(v) - f(v) \;=\; o_V$, d.h.

$$\underline{v - f(v) \in \mathrm{Kern}(f) = U}$$

c) Annahme: f ist injektiv, also $U = \mathrm{Kern}(f) = O$. Wegen b) folgt dann $v - f(v) = o_V$ $(\forall\, v \in V)$ und daraus $f(v) = v$ $(\forall\, v \in V)$, also $f = \mathrm{id}_V$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

d) Für ein beliebiges $v \in V$ gilt wegen b)

$$v \;=\; \underbrace{(v - f(v))}_{\in U} + \underbrace{f(v)}_{\in W} \;\in\; U + W$$

Das bedeutet $V \subseteq U + W$. Da $U + W \subseteq V$ sowieso gilt, folgt $\underline{V = U + W}$.

Sei $v \in U \cap W$ beliebig. Dann folgt $f(v) = o_V$ wegen $v \in U = \mathrm{Kern}(f)$ und $f(v) = v$ nach a) wegen $v \in W$. Daraus ergibt sich $v \;=\; f(v) \;=\; o_V$, also $\underline{U \cap W = O}$. Insgesamt erhält man

$$V \;=\; U \oplus W$$